Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT12 Reglerteknik

Tentamensdatum: 23 augusti 2024

1. (a) Med $v(t)$ ges modellen av

$$\alpha \dot{y}(t) = u(t) - \beta y(t)$$

vilket ger

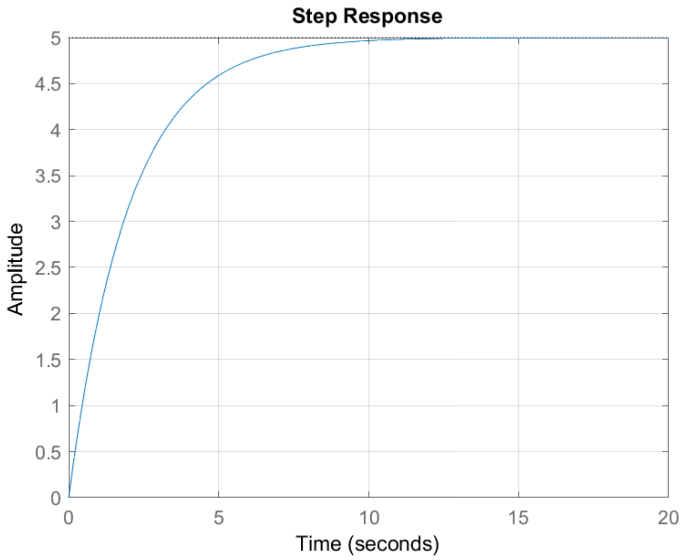
$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

där $T = \frac{\alpha}{\beta}$ och $k = 1/\beta$. När $u(t)$ är ett steg med amplituden fem och $y(0) = 0$ blir lösningen till differentialekvationen

$$y(t) = 5k(1 - e^{-t/T})$$

som går mot $5k$ d v s $5/\beta$ när $t \to \infty$. Sluttemperaturen är alltså inverst proportionell mot β som beror av hur välisolerat huset är. Ett lågt värde på β anger att huset är välisolerat och då ger en viss effekt högre resulterande temperatur inne. Temperaturen har nått till 63 procent av sitt slutvärde efter tiden T, d v s $\frac{\alpha}{\beta}$ sekunder.

Stegsvarets principiella utseende, för fallet $\alpha = 2, \beta = 1$ ges av figur 1.



Figur 1: Stegsvar.

(b) Utan tillförd effekt kommer temperaturen inomhus att med tiden bli samma som temperaturen utomhus, d v s $y(t)$ går mot -5. Detta fås även genom att lösa diff.ekvationen på motsvarande sätt som ovan.

(c) Programkoden motsvarar en PI-regulator. I den tidskontinuerliga PI-regulatorn

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

approximeras integralen med en summa enligt

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx I_k = \sum_{l=1}^{k} e_l$$

som i sin tur uppdateras enligt

$$I_k = I_{k-1} + e_k$$

Svar: En tidsdiskret PI-regulator.

(d) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

och insättning ger den karakteristiska ekvationen

$$s(s+1)^2 + K_D s^2 + K_P s + K_I = s^3 + (2 + K_D)s^2 + (K_P + 1)s + K_I = 0$$

Med önskad polplacering i -2 fås den önskade karakteristiska ekvationen

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

och jämförelse ger $K_P = 11, K_I = 8$ och $K_D = 4$.

Svar: $K_P = 11, K_I = 8, K_D = 4$.

2. (a) Avläsning i figuren ger att periodtiden är ca 3.1 sek, vilket ger att approximativt $\omega = 2$. Eftersom insignalens amplitud är ett blir utsignalens amplitud $\mid G(i\omega) \mid$, vilket i detta fall ger

$$\mid G(i \cdot 2) \mid = \frac{\alpha}{\sqrt{4 + \alpha^2}} = 0.9$$

efter avläsning i figuren. Detta ger $\alpha \approx 4$, och polen är därmed approximativt -4.

Svar: Polen är ca -4.

(b) I fall B och C innehåller $G_O(s)$ en integration eftersom $\mid G_O \mid$ växer för minskande ω samt att $\arg G_O$ startar på $-90°$. Detta medför att det återkopplade systemet får statisk förstärkning ett och att $y(t)$ går mot ett, vilket motsvarar I och II. Kurvan i C har större fasmarginal än B, vilket motsvarar att det återkopplade systemets stegsvar är mindre oscillativt, vilket ger kombinationerna C - I samt B - II. Kurvan i D har högre statisk förstärkning än kurvan i A, vilket ger att D motsvarar ett stegsvar med mindre stationärt fel än för A. Detta ger kombinationerna D - III samt A - IV. Kombinationen kan även göras genom att titta på fasmarginal och översläng.

Svar: A - IV, B - II, C - I, D - III

(c)
- Med $K = 2$ fås att $G_O(i\omega) = KG(i\omega)$ får en skärfrekvens som är ca 1 rad/s, och där är argumentet för $G_O(i\omega)$ ca $-180°$, vilket ger att fasmarginalen är ca $0°$. D.v.s. uppgiften visar ett extremfall.
- Eftersom $G(s$ innehåller en integration, d v s en faktor s i nämnaren kommer det stationära felet att bli noll.

Svar: (i): $\phi_m = 0°$, (ii): Det stationära reglerfelet blir noll.

3. (a) Med de angivna tillståndsvariablerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t) - 2\zeta\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\omega_0^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_0 x_2(t) + \omega_0^2 u(t)$$

På matrisform ger detta

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

(b) Med den givna återkopplingen får vi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1+l_1) & -2\zeta\omega_0 - l_2\omega_0^2 \end{pmatrix} x + l_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} r \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Polerna till det slutna systemet ges av egenvärdena matrisen $A - BL$. Beräkning av egenvärdena ger den karaktäristiska ekvationen

$$s^2 + (2\zeta\omega_0 + l_2\omega_0^2)s + \omega_0^2(1+l_1) = 0$$

Vi vill ha ett system vars poler ligger dubbelt så långt ifrån origo som det öppna systemets, samt har en dämpning $\zeta = 1$. Avståndet till origo bestäms av ω_0. Karaktäristiska ekvationen skall alltså vara

$$s^2 + 2(2\omega_0)s + (2\omega_0)^2$$

Identifiering ger

$$l_1 = 3$$

$$l_2 = \frac{4 - 2\zeta}{\omega_0}$$

Svar: $l_1 = 3$ och $l_2 = \frac{4-2\zeta}{\omega_0}$

(c) Den relativa dämpningen ζ kan antingen bestämmas via de formler som finns i boken, d v s

$$M = e^{-\alpha}, \alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

eller via Figur 2.7 i boken. I figuren i uppgiften avläser vi en översläng på ungefär 0.37 vilket via formeln ovan ger $\zeta = 0.3$. Figur 2.7 ger motsvarande resultat.

Frekvensen hos svängningen i stegsvaret ges av

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

I figuren i uppgiften kan vi se att svängningstiden är ungefär 3.6 sekunder, vilket motsvarar en frekvens ω_d på 1.74. Detta ger $\omega_0 = 1.82$.

Svar: $\omega_0 = 1.8$ och $\zeta = 0.3$.

4. (a) Blockschemaräkning ger

$$E(s) = R(s) - G(s)(V(s) + F(s)E(s))$$

vilket ger

$$E(s)(1 + F(s)G(s)) = R(s) - G(s)V(s)$$

som ger sambandet

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}V(s)$$

(b) Slutvärdessatsen ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{1 + F(s)G(s)} - \lim_{s\to 0} \frac{2G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Den första termen i högerledet går mot noll om någon av $F(s)$ eller $G(s)$, eller båda, har ett s i nämnaren, d v s en integration,vilket gör att termen går mot noll när s går mot noll. Den andra termen, däremot, går mot noll endast då $F(s)$ har ett s i nämnaren. Detta ger följaktligen:

Svar: I: Felet går ej mot noll.II: Felet går mot noll.III: Felet går ej mot noll. IV: Felet går mot noll.

(c) Följande observationer kan göra utgående från rotorten:

- För små värden på K ligger en pol i HHP, d v s systemet är instabilt.
- För något större värden på K är båda polerna i VHP, d v s systemet är stabilt, och båda polerna är reeella.
- För ytterligare större värden på K blir polerna komplexa, d v s stegsvaret blir oscillativt där, för vissa värden på K, frekvensen hos oscillationen ökar med K.

Baserat på dessa obsevationer kan värdena på K och stegsvaren kombineras enligt följande: (i) - B, (ii) - C, (iii) - D, (iv) - A

Svar: (i) - B, (ii) - C, (iii) - D, (iv) - A

5. (a) Med modellen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

och det verkliga systemet

$$G^0(s) = \frac{(1+\delta)}{(s+1)^3}$$

blir det relativa modellfelet $\Delta G(s) = \delta$. Robusthetskriteriet ger då kravet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\delta}$$

$\mid G_C(i\omega) \mid$ är som störst ca 4, viket ger kravet $4 < 1/\delta$,d v s $\delta < 1/4$.

Svar: $\delta < 1/4$

(b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

och det verkliga systemet

$$G^0(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s(1+\delta)+1)}$$

fås det relativa modellfelet

$$\Delta G(s) = \frac{-s\delta}{s(1+\delta)+1}$$

Svar: Det relativa modellfelet ges av

$$\Delta G(s) = \frac{-s\delta}{s(1+\delta)+1}$$

(c) Robusthetskriteriet

$$\mid G_C(i\omega) < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

ger kravet

$$\mid G_C(i\omega) < \frac{\sqrt{\omega^2(1+\delta)^2+1}}{\delta\omega}$$

Högerledet går mot oändligheten när ω avtar, men när ω växer kommer högerledet att avta, för att gå mot $(1+\delta)/\delta$ när ω går mot oändligheten. För att undersöka om det finns någon situation där olikheten inte gäller kan vi t ex studera fallet när $\mid G_C(i\omega) \mid$ är som störst, vilket sker vid $\omega \approx 1.5$. Olikheten ska gälla för alla $\delta > 0$ och genom att t ex sätta in $\delta = 1$ blir högerledet ca 2.1 vilket gör att olikheten inte gäller.

Svar: Stabiliteten kan inte garanteras för alla $\delta > 0$.