Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT19/23 Reglerteknik

Tentamensdatum: 13 januari 2025

1. (a) Karakteristiska ekvationen ges av $s^2 + s - 2 = 0$ vilken man direkt ser inte kan vara stabil eftersom det finns negativa koefficienter. Mer precist så kan vi faktorisera till $(s-1)(s+2) = 0$ dvs instabil pol i 1, eller om man inte ser det direkt så löser man ekvationen och får $s = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2} = -1/2 \pm 3/2$ och får lösningar $+1$ och -2.

   (b) Med $F(s) = K$ ges slutna systemet ges av $\frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{KB(s)}{A(s)+KB(s)}$ dvs slutna systemet har samma täljare som $G(s)$ och således samma nollställen.

   (c) Signalerna n och v är irrelevanta då det enda vi söker är överföringsfunktionen från r. Följandes schemat baklänges har vi från den sökta signalen $U(s) = F(s)(R(s) - G(s)U(s)$. Vi löser ut u och får $U(s) = \frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}R(s)$ dvs överföringsfunktionen är $\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}$

   (d) Sambandet mellan u och q är en standard första ordningens modell parameteriserad i tidskonstant T (och statisk förstärkning 1), och i vänstra figuren kan vi se att tidskonsten T är ca 5 sekunder eftersom 63% av slutvärdet nås efter ungefär 5 sekunder. I sambandet från u till y, $Y(s) = \frac{1}{sT+1}\frac{K}{s+1}$ är statiska förstärkningen K. Eftersom ett enhetssteg på u lett till ett slutvärde 3 så betyder det att $K = 3$ (alternativt, q konvergerar till 1, och statiska förstärkningen från q till y är K och således är K 3)

   (e) Det enda systemet med statisk förstärkning 1 är G_2. Det enda stegsvaret som konvergerar till 1 är A. Om vi skriver nämnaren i standardform $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ så ser vi att G_1 har $(\zeta = 0.5, \omega_0 = 4)$, G_3 har $(\zeta = 0.3, \omega_0 = 1)$ och G_4 har $(\zeta = 1/2, \omega_0 = 1)$. Stegsvar B har mycket större översläng än C och D och motsvarar alltså ett sämre dämpat system vilket ger $G_3 - B$. Av de återstående stegsvaren är C ca 4ggr snabbare än D vilket matchar med att ω_0 är 4ggr högre för G_1 än G_4. Således $G_1 - C$, $G_4 - D$.

2. (a) Seriekopplade systemet är $\frac{1}{1+10s}\frac{1}{1+10s} = \frac{1}{(1+10s)^2}$. Fasförskjutningen i 1 rad/s ges av $\arg\frac{1}{(1+10i)^2} = -\arg(1+10i)^2 = -2\arg(1+10i) = -2\arctan 10 = -2 \cdot 1.47 = -2.94 = -169°$

   (b) Förstärkning i 5 rad/s ges av $\left|\frac{\alpha}{(5i)^2+5i+2}\right| = \frac{\alpha}{\sqrt{(-25+2)^2+5^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{554}}$. Utsignalen ser ut att ha en amplitud kring 1, och således ska vi lösa $1 = 8 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{554}}$ och får $\alpha = \frac{\sqrt{554}}{8} = 2.94$

   (c) Fasförskjutningen i frekvensen ω p.g.a av en tidsförskjutning T ges av $\arg e^{-i\omega T} = -\omega T$. Sålunda måste vi ha en fasmarginal större än $\omega_c T$, dvs fasmarginalen måste vara minst $2 \cdot 0.2 = 0.4$ rad $(22.9°)$

   (d)
   - Kretsförstärkning 1 har en förstärkning som går mot oändligheten när ω går mot 0, till skillnad från kretsförstärkning 2 som går mot ett värde något över 1. För att slutna systemet ska kunna få statisk förstärkning 1 måste kretsförstärkning ha en statisk förstärkning som går mot oändligheten. Sålunda kopplas vi $1-1$ och $2-2$.
   - Om man har en liten fasmarginal får slutna systemet en resonanstopp. Kretsförstärkning 1 har stor fasmarginal, kretsförstärkning 2 har väldigt liten fasmarginal, slutna systemet 1 har ingen resonanstopp, slutna systemet 2 har resonanstopp. Sålunda kopplas vi $1-1$ och $2-2$.
   - Den exakta kopplingen mellan kretsförstärkning $G_o(i\omega)$ och slutna systemet $G_c(i\omega)$ är $G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1+G_o(i\omega)}$. Vi kan således ta en godtycklig punkt i kretsförstärkningen och räkna ut vad det blir. Vi ser att fasen är väldigt nära $-90°$ i alla frekevenser för kretsförstärkning 1, dvs $G_o(i\omega)$ är i stort ett negativt imaginärt tal i alla frekvenser. Om vi t.ex tar frekvensen 50 rad/s så är förstärkningen $-20dB = 0.1$ och vi har därför att $G_o(50i) \approx -0.1i$ vilket ger $G_c(50i) \approx 0.0099 - 0.0990i$ med absolutbelopp omkring 0.1 dvs $-20dB$. Detta stämmer med slutna system 1 men långt från slutna systemet 2 som har en förstärkning kring $-60dB$ i 50 rad/s. Sålunda kopplas vi $1-1$ och $2-2$.

3. (a) Vi studerar polerna som ges av rötter till $det\left(sI - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = (s+2)^2 - 1 = s^2 + 4s + 3$. Stabilt ty koefficienterna på andragradaren är positiva (rötterna ges av $-2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$)

(b) För styrbarhet studerar vi $\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinanten är 0 och således är inte systemet styrbart.

(c) Ansätt $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ och slutna systemet ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(sI - \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} l_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + s(4 + l_1 + 2l_2) + (3 + 4l_1 + 5l_2)} \begin{pmatrix} s + 2 + 2l_2 & l_2 - 1 \\ 1 - 2l_1 & s + 2 + l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} l_0$$

Önskat polpolynom är $(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$ ur vilket vi löser $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, och fortsätter för att ta fram slututrycket för slutna systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + 8s + 16} \begin{pmatrix} s + 4 & 0 \\ -3 & s + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} l_0 = \frac{(3s + 9)l_0}{s^2 + 8s + 16}$$

ur vilket vi får att $l_0 = 16/9$ för att erhålla statisk förstärkning 1.

(d) För att kunna skatta de två tillstånden via mätningen måste det vara observerbart. Vi kontrollerar således $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ som har determinant 0, så någon får det tveksamma nöjet att säga till chefen att idén inte funkar.

4. (a) Systemet har poler i origo, och således kommer konstanta referenssignaler kunna följas utan statiskt reglerfel även utan integralverkan i regulatorn, och sålunda kan vi direkt stryka I-del. För att se om vi klarar oss med en enkel P-regulator testar vi $F(s) = K_P$ och får slutna systemet till $\frac{K_P}{s^2+K_P}$ vilket aldrig går att stabilisera ty polerna kan ej placeras strikt i vänstra halvplanet oavsett val av K_P. Kvar har vi PD-regulator, $F(s) = K_P + K_D s$ med slutna systemet $\frac{K_P+K_D s}{s^2+K_D s+K_P}$. Alla val av strikt positiva K_P och K_d ger ett stabilt system, t.ex $K_P = 1, K_D = 2$ som ger två poler i -1.

(b) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^n}$ reglerat med $F(s) = K$ ger att slutna systemets polpolynom ges av $(s+1)^n + K$.

En pol i α för slutna systemet betyder att $(\alpha + 1)^n + K = 0$. Detta är omöjligt för ett reellt α om n är jämnt och $K > 0$ eftersom $(\alpha + 1)^n$ aldrig kan bli negativt (det blir som minst 0 vilket inträffar om $\alpha = -1$), och vi således summerar en ickenegativ term och en positiv term.

Vi kan också se det genom att rötterna ges av $s = -1 + (-K)^{1/n}$ och en jämn rot av ett negativt tal blir komplext.

Alternativt så kan man resonera med hjälp av rotortsteori. Startpunktspolynomet är $P(s) = (s+1)^n$ dvs det finns n repeterade startpunkter i -1. Slutpunktspolynomet är $Q(s) = 1$ dvs det finns inga slutpunkter. Enligt rotortsteorin så ingår de delar av reella axeln (dvs poler kan finnas där för något val av $K > 0$) som har ett udda antal start- och slutpunkter till höger om sig. Några sådana punkter finns ej, ty man har antingen 0 till höger om sig eller n st till höger om sig.

(c) $U(s) = F(s)(-G(s)(V(s) + U(s)))$ vilket ger $U(s) = \frac{-G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} V(s)$. Överföringsfunktionen blir $\frac{-K}{(s+1)^2+K}$. Förstärkningen i frekvensen 1 rad/s ges av $\left| \frac{-K}{(i+1)^2+K} \right| = \frac{K}{|-1+2i+1+K|} = \frac{K}{\sqrt{K^2+2^2}}$ och det följer att förstärkningen är mindre än 1 för alla $K > 0$ ty nämnaren är alltid större än K, och således har styrsignalen (asymptotiskt) en amplitud som är mindre än 1 då insignalstörningens amplitud är 1.

5. (a) Inför $G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$ och kalla signalen efter den vänstra summationen för $E(s)$ samt låt $\dot{\theta}(t) = v(t)$. Den inre loopen beskrivs av $V(s) = G_1(s)(E(s) - K_V V(s))$ ur vilket vi får $V(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)K_V} E(s) = G_{inner}(s)E(s)$. Hela den inre loopen från $E(s)$ till $\theta(s)$ ges alltså av $\theta(s) = \frac{1}{s} \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)K_V} E(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.1s+1)+K_V s} E(s) = G_2(s)E(s)$.

Slut nu den yttre loopen $\theta(s) = G_2(s)E(s) = G_2(s)(R(s) - K_P \theta(s))$ som leder till $\theta(s) = \frac{G_2(s)}{1+K_P G_2(s)} R(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.1s+1)+K_V s+K_P} R(s)$ och sökt karakteristiskt ekvation följer av polpolynomet.

(b) Om rotorten ritas med avseende på K_P så blir $P(s) = s((s+1)(0.1s+1)+K_V)$ och $Q(s) = 1$, och om rotorten ritas med avseende på K_V så blir $P(s) = s(s+1)(0.1s+1) + K_P$ och $P(s) = s$. I det första fallet har vi alltså 3 startpunkter (varav en lätt ses är i origo) och ingen slutpunkt, vilket ska ge 3 asymptotriktningar (riktning $-180°, \pm 60°$), medan det andra fallet ger tre startpunkter, en slutpunkt (trivialt i origo) och således två asymptoter (riktningar $\pm 90°$). Figuren visar tre startpunkter (kryss, varav 1 i origo) men inga slutpunkter (o) samt en situation med en asymptot som sticker ut åt vänster samt 2 som går ut i riktning $\pm 60°$. Rotorten är alltså ritad med avseende på K_P.

(c) (i) Nej. Slutna systemet har tre poler och vi kan omöjligen ha ett udda antal komplexa poler då dessa alltid uppträder i ett symmetriskt komplexkonjugerat par.

(ii) Ja. Antag att de två initialt komplexa polerna har justerats via ökande K_P och således rör sig längs sina grenar och kommit ner till reella axeln och blivit reella. Den tredje polen kan då inte vara komplex, eftersom komplexa poler alltid uppträder i par (rotorten är symmetrisk). Dvs den är reell, och vi har tre reella poler.

(iii) Nej, för väldigt stora K_P rör vi oss längs med asymptoterna och två av dessa går ut i högra halvplanet