Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT19/23 Reglerteknik

Tentamensdatum: 17 mars 2025

1. (a) Vi har $Y(s) = \frac{s+3}{(2s+3)(s+4)}U(s) = \frac{s+3}{2s^2+11s+12}U(s)$ vilket vi skriver som $(2s^2+11s+12)Y(s) = (s+3)U(s)$. Vi vet att s motsvarar derivationsoperator i tidsdomän och således har vi differentialekvationen $2\ddot{y} + 11\dot{y} + 12y = \dot{u} + 3u$

   (b) Med $F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$ ges slutna systemet av $\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{B(s)(K_P s+K_I)}{A(s)s+(K_P s+K_I)B(s)}$. Dvs slutna systemet har alltså nollställepolynomet $B(s)(K_P s + K_I)$ vilket betyder att nollställena är dels de ursprungliga nollställena i öppna systemet vilka ges av $B(s) = 0$ samt ett nollställe i $-K_I/K_P$ som introducerats av regulatorn.

   (c) Följandes schemat baklänges (med irrelevanta signalen r satt till 0)

$$U(s) = F(s)(0 - G(s)(-V(s) + H(s)U(s))$$

   Vi löser ut u och får $U(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)H(s)}V(s)$ dvs överföringsfunktionen är $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)H(s)}$

   (d) Statiska förstärkning totalt från q till y ges av $(1/0.5)\cdot 4$ dvs 8. Eftersom slutamplituden på y är 40 så måste insignalen ha en amplitud på 5.

   För att finna en approximation finns det flera sätt. Ett är att bara titta på stegsvaret till slutsignalen y. Trivialt vet vi att statiska försärkningen är $K = 8$ (detta har vi ju just utnyttjat). Signalen når 63% av slutvärdet (25.2) efter ungefär 5 sekunder, så rimligen är $T = 5$ en god approximation. Alternativt, vi vet att dynamiken skapas av att insignalen först går in ett system med en väldigt liten tidskonstant (0.2 sekunder) som sedan är seriekopplad med ett långsamt system med en tidskonstant på 5 sekunder. I sammanhanget kan dynamiken i det första systemet försummas och det kan ses som ett system som bara förstärker insignalen med en faktor 2. Således kan seriekopplingen approximeras med $2 \cdot \frac{4}{5s+1}$ dvs $\frac{8}{5s+1}$. Ännu ett sätt är att forma seriekopplingen genom att multiplicera de två systemen vilket leder till $\frac{8}{s^2+5.2s+1}$. Om man tänker sig detta i frekvensplanet är det alltså frekvensfunktionen $\frac{8}{(i\omega)^2+5.2i\omega+1}$ som hanteras. För små ω (dvs långsamma förlopp) kommer denna ge upphov till samma frkevenssvar som $\frac{8}{5.2i\omega+1}$ vilket indikerar att vi skulle kunna använda approximationen $\frac{8}{5.2s+1}$. Detta är ju rimligt, vi har ersatt de två seriekopplade systemen med ett nytt system där vi inte försummar den lilla tidskonstanten i det första systemet helt, utan lägger till den på den långsammare dynamiken. Änne ett intuitivt sätt att komma fram till samma approximation är att totala statiska förstärkningen är 8, den dominerande dynamiken är ett första ordningens system med tidskonstant 5, men sen finns det även en dynamik som ger en i sammanhanget väldigt liten nedsaktningen av dynamiken med en tidskonstant på 0.2 sekunder, så vi kan approximativt slå ihop dessa två effekter och se det som en total tidskonstant på 5.2 sekunder.

   (e) Alla system har statisk förstärkning 3. A och C ser identiskt monotona ut, enda skillnaden är att C är dubbelt så snabbt. Både B och D har oscillationer, men i B verkar dessa vara kraftigt dämpade. Systemen G_3 och G_4 är seriekopplingar av ett väldigt resonant andra ordningens system med ett första ordningens system, där tidskonstanten det dämpande första ordningens system i G_3 är väldigt stor (dvs pol nära origo, dvs dominerande). Det kommer således ske mycket mer dämpning i G_3 än G_4. Alltså får vi $G_3 - B, G_4 - D$. I G_1 identifierar vi $\omega_0 = 8$ och i G_2 är $\omega_0 = 4$. Eftersom ω_0 agerar tidsskalning (stort ger snabbt) så måste vi ha $G_1 - C$ och $G_2 - A$.

2. (a) Om vi parallellkoppplar så blir totala systemet $G(s) + G(s) = 2G(s)$. Sålunda kommer fasförskjutningen ges av $\arg 2G(1i) = \arg(2) - \arg(1+10i) = 0 - \arctan 10 = -1.47 = -84.3°$

   (b) Periodtiden på signalen ser ut att vara ungefär 1 sekund vilket betyder att frekvensen ges av $\beta = \frac{2\pi}{1}$. Förstärkningen i denna frekvens ges av $\left|\frac{4}{(2\pi i)^2+2\pi i+2}\right| = \frac{4}{\sqrt{(-4\pi^2+2)^2+(2\pi)^2}} \approx 0.105$. Observerad signal har amplitud 0.8, och vi löser således $0.8 = 0.105\cdot\alpha$ och får att insignalens amplitud borde ha varit omkring 7.6;

   (c) Fasförskjutningen i frekvensen ω p.g.a av en tidsförskjutning T ges av $\arg e^{-i\omega T} = -\omega T$. Sålunda måste vi ha en fasmarginal större än $\omega_c T$, dvs fasmarginalen måste vara minst $2\cdot 0.2 = 0.4$ rad (22.9°). Detta betyder att fasen i kretsförstärkningen inte får vara mindre än $-157.1°$.

(d)
- Kretsförstärkning 1 har en förstärkning som går mot runt 25dB (dvs 17) samtidigt som kretsförstärkning 2 har en klart lägre statisk förstärkning på kanske 5dB (dvs 1.8). I stegsvaren för slutna systemen ser vi att det övre konvergerar mot ett värde nära 1 (vilket motsvarar en statisk förstärkning i slutna systemet nära 1, vilket kräver en stor statisk förstärkning i kretsförstärkning, dvs kretsförstärkning 1). Det nedre stegsvaret konvergerar till ett värde runt 0.75, vilket indikerar en statiskt förstärkning i slutna systemet som inte är så stort, dvs statisk förstärkning i kretsförstärkningen inte särskilt stor.
- Kretsförstärkning 2 har en väldigt liten fasmarginal, vilket stämmer med att stegsvar 2 är väldigt resonant (kretsförstärkning 1 har en större fasmarginal, och stegsvar 1 är inte lika resonant)
- Kretsförstärkning 2 har en väldigt liten fasmarginal, vilket stämmer med att stegsvar 2 är väldigt resonant (kretsförstärkning 1 har en större fasmarginal, och stegsvar 1 är inte lika resonant)

  Många resonerar via resonanstoppen i kretsförstärkning 2, men det är inte direkt avslöjande. Om man har ett Bodediagram över ett system, och där har en resonanstopp, så kommer man få oscillationer i ett stegsvar. Här har vi dock Bodediagram över en kretsförstärkning, och stegsvaret är på det slutna systemet, inte på systemet som representeras av Bodediagrammet. Logiken är att en liten fasmarginal i en kretsförstärkning leder till resonanstopp i slutna systemets Bodediagram, vilket indikerar oscillationer i tidsplanet.

3. (a) Vi studerar polerna som ges av rötter till $det\left(sI - \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}\right) = (s+\alpha)^2 - 1 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 - 1$. För poler i vänstra halvplanet är ett ekvivalent villkor på en andragradare att båda koefficienterna är positiva, dvs kravet blir $\alpha > 1$.

   Ett vanligt misstag här är att man börjar räkna ut poler explicit och göra det onödigt krångligt.

   (b) Vi har ekvationerna $\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2 + u$ och $\dot{x}_2 = x_1 - \alpha x_2$. Laplace ger $X_1 = \frac{1}{s}(-\alpha X_1 + X_2 + U)$ och $X_2 = \frac{1}{s}(X_1 - \alpha X_2)$. Alternativt så ser man det direkt via integrering av vänster- och högersida $x_1 = \int -\alpha x_1 + x_2 + u$ och $x_2 = \int x_1 - \alpha x_2$, integrering är ju vad operatorn $\frac{1}{s}$ betyder.

   (c) Ansätt $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ och slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(sI - \left(\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_0$$

   Förenkling ger

$$G_c(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+\alpha+l_1 & l_2-1 \\ -1 & s+\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_0$$

   Beräkning av inversen ger

$$G_c(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2 + s(2\alpha + l_1) + \alpha(\alpha + l_1) + l_2 - 1} \begin{pmatrix} s+\alpha & 1-l_2 \\ 1 & s+\alpha+l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_0$$

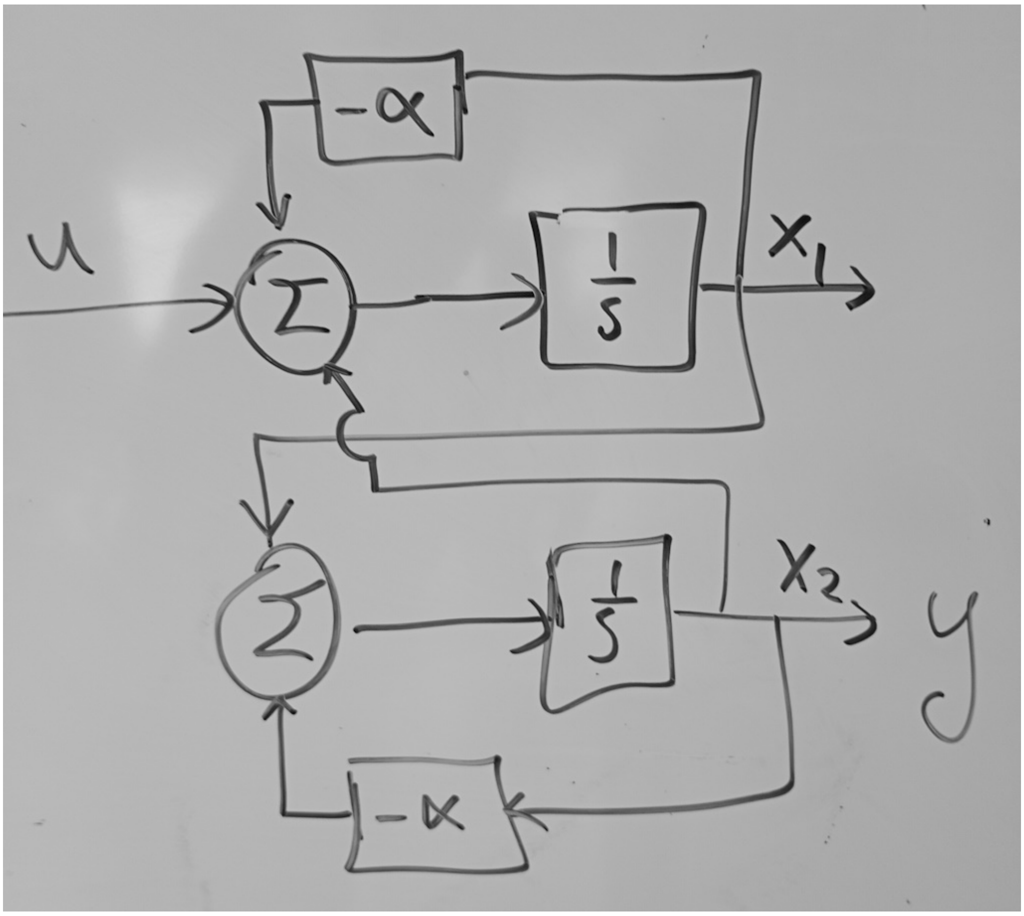
   Önskat polpolynom är $(s+2\alpha)^2 = s^2 + 4\alpha s + 4\alpha^2$ ur vilket vi löser $l_1 = 2\alpha$, $l_2 = 1 + \alpha^2$, och fortsätter för att ta fram slututrycket för slutna systemet vilket blir enkelt då C och B innehåller nollor vilket gör att det enda elementet som överlever multiplikationen från vänster och höger är ettan i nedre vänstra hörnet.

$$G_c(s) = \frac{l_0}{s^2 + 4\alpha s + 4\alpha^2}$$

   ur vilket vi får att $l_0 = 4\alpha^2$ för att erhålla statisk förstärkning 1.

4. (a) T.ex $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ ger $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ och $\dot{x}_2 = \ddot{y} = u - y - \dot{y} = -x_1 - x_2 + u$. I matrisform har vi alltså

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$



Figur 1: Blocksschemearepresentation av tillståndsmodell

(b) Här kan man använda sig explicit av tillståndsmodellen, men enklast är att bara stoppa in styrlagen i differentialekvationen, $\ddot{y} = (-y - \dot{y} + 2r) - y - \dot{y}$ och förenkla till $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 2r$ och vi ser att vi har en andragradare med positiva koefficienter vilket betyder stabilitet, eller mer utförligt, $Y(s) = \frac{2}{s^2+2s+2}R(s)$ dvs en överföringsfunktion vars poler är i vänstra halvplanet.

(c) Överföringsfunktionen har statisk förstärkning 1, dvs stationärt kommer $y = r$. I stationärt tillstånd måste $\dot{y} = \ddot{y} = 0$, och styrlagen säger således att $u = -r + 2r = r = 1$.

(d) Förstärkningen i frekvensen $\omega = 1$ för slutna systemet ges av $\left|\frac{2}{(i)^2+2i+2}\right| = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89$ vilket också blir den resulterande amplituden då referensens amplitud är 1.

(e) Om $b = 0$ ges slutna systemet av $\ddot{y} = (-y - \dot{y} + 2r) - y$ dvs $Y(s) = \frac{2}{s^2+s+2}R(s)$. För att få maximal excitering av en insignal ska man använda sig av en signal med en frekvens som matchar systemets resonansfrekvens. En god approximation av denna resonansfrekvens ges av ω_0 när man skriver andragradaren som definierar överföringsfunktionens nämnare i standardform, Vi skriver nämnaren som $s^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}s + \sqrt{2}^2$ för att identifiera $\omega_0 = \sqrt{2}$ och $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. (den exakta resonansfrekvensen ges av $\sqrt{1 - 2\zeta^2}\omega_0$).

5. (a) Det verkliga systemet beskrivs av

$$G^0(s) = \frac{1+\alpha}{s(s+1)}$$

och regulatorn väljs till

$$F(s) = K = 4$$

Då fås det verkliga slutna systemet

$$G_C^0(s) = \frac{G^0(s)F(s)}{1 + G^0(s)F(s)} = \frac{4(1+\alpha)}{s(s+1) + 4(1+\alpha)}$$

Polerna är i vänstra halvplanet om och endast om alla koefficienter till andragradaren är positiva, vilket leder till $\alpha > -1$.

(b) Det relativa modellfelet $\Delta G(s)$ ges av

$$\begin{aligned}
G^0(s) &= G(s)\left(1+\Delta G(s)\right) \iff \\
\frac{1+\alpha}{s(s+1)} &= \frac{1}{s(s+1)}\left(1+\Delta G(s)\right) \iff \\
1+\alpha &= 1+\Delta G(s) \iff \\
\Delta G(s) &= \alpha
\end{aligned}$$

(c) Enligt robusthetskriteriet garanteras det återkopplade systemet vara stabilt om

$$|\Delta G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall\omega$$

där komplementära känslighetsfunktionen definieras från den nominella modellen

$$T(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{4}{s^2+s+4}$$

Kriteriet blir då

$$|\alpha| < \left|\frac{(i\omega)^2+i\omega+4}{4}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{\left(4-\omega^2\right)^2+\omega^2} \quad \forall\omega$$

Kriteriet på α är således det lägsta värdet man kan få på högerledet. Vi introducerar $a=\omega^2$ och minimerar uttrycket som är under kvadratroten

$$\begin{aligned}
\min_a g(a) = (4-a)^2 + a &\iff \\
g'(a) = -2(4-a)+1 = 0 &\iff \\
-7+2a = 0 &\iff \\
a = \omega^2 = \frac{7}{2}&
\end{aligned}$$

Detta värde på ω^2 ger det lägsta värdet på högerledet i kriteriet, som blir

$$|\alpha| < \frac{1}{4}\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \approx 0.484$$

Robusthetskriteriet garanterar att återkopplade systemet är stabilt för $-.484 < \alpha < 0.484$.

(d) Robusthetskriteriet är ett tillräckligt kriterium, men inte nödvändigt, så systemet kan vara stabilt trots att kriteriet inte uppfylls. Kriteriet att alla poler ligger i vänster halvplan är både tillräckligt och nödvändigt, så systemet är asymptotiskt stabilt om det kriteriet uppfylls och instabilt om det inte uppfylls.