Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT93)

Tentamensdatum: 5 juni 2025

1. (a) **Styrsignal:** Styrvinkel och kraft på pedalerna.
Utsignal: Hastighet och riktning på cykeln.
Störning: Motvind/medvind och uppförsbacke/nedförsbacke.

(b) B och C snabbare än A och D $\Rightarrow$ Högre ω_0 $\Rightarrow$ B och C $\leftrightarrow$ (i),(ii), A och D $\leftrightarrow$ (iii),(iv). A och C svänger mer än B och D $\Rightarrow$ Lägre ζ $\Rightarrow$ A och C $\leftrightarrow$ (ii),(iv), B och D $\leftrightarrow$ (i),(iii). Detta ger: A $\leftrightarrow$ (iv), B $\leftrightarrow$ (i), C $\leftrightarrow$ (ii) och D $\leftrightarrow$ (iii).

(c) S och T måste uppfylla $S + T = 1$. Här är $S + T = \frac{5s+3}{s+2} \neq 1$

(d) För ett linjärt system gäller att

$$\begin{cases} Y(s) = G(s)U(s) \\ U(s) = \sum a_i U_i(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \sum a_i G(s) U_i(s) = \sum a_i Y_i(s)$$

Dvs om insignalen r en linjärkombination så kommer utsignalen att vara samma linjärkombination av $Y_i(s) = G(s)U_i(s)$. Det innebär att utsignalen kommer vara $y(t) = 3\sin(4t - 3) + 4\cos(8t - 2)$.

(e) Laplacetransformen av reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ ges av

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_c(s)R(s) = (1 - G_c(s))R(s) = (1 - G_c(s))\frac{1}{s}$$

då $r(t)$ är ett steg med amplitud 1. Under förutsättning att man väljer ett värde på K som ger ett stabilt system, fås enligt slutvärdesteoremet att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)+K}\frac{1}{s} = \frac{3}{3+K}$$

Man ser att felet visserligen minskar med ökande värde på K, men att det aldrig når 0.

(f) Det magiska tricket för att få reglerfelet 0 är att införa en I-del i regulatorn enligt $F(s) = K + K_I\frac{1}{s}$. Med liknande räkningar som i uppgiften ovan fås då

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{s(s+1)(s+3)}{s(s+1)(s+3)+Ks+K_I}\frac{1}{s} = 0$$

2. (a) i. Modellen ges av

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u,$$

och återkopllingen ges av

$$u = -\underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}}_{L} x + r.$$

Polpolynomet för tillståndsåterkopplingen ges av

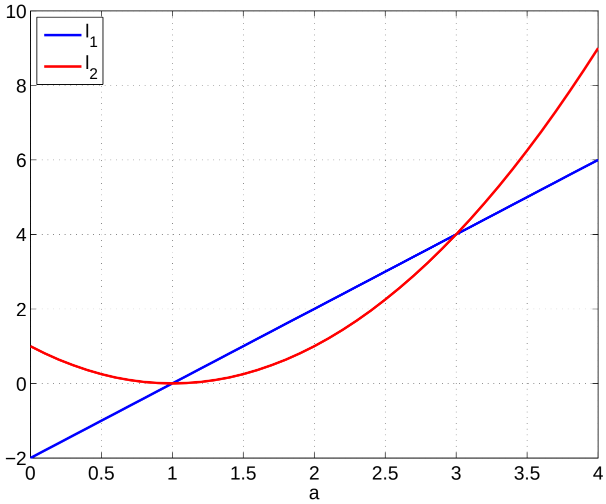
$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 + l_1 & l_2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1+l_1)(\lambda+1)+l_2 = \lambda^2+(2+l_1)\lambda+1+l_1+l_2. \tag{1}$$

Det önskade polpolynomet är

$$(\lambda + a)^2 = \lambda^2 + 2a\lambda + a^2. \tag{2}$$

Identifiering mellan (1) och (2) ger

$$\begin{cases} 2 + l_1 = 2a \\ 1 + l_1 + l_2 = a^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} l_1 = 2(a-1) \\ l_2 = (a-1)^2 \end{cases}$$



Figur 1: l_1 och l_2 som funktion av a.

ii. En skiss görs lätt genom att kolla extremvärdena hos $l_1(a)$ och $l_2(a)$ och sätta in några a-värden, se figur 1. Polerna hos systemet utan återkoppling är egenvärdena till A-matrisen och dessa ges av

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1.$$

$l_1 = l_2 = 0$ för $a = 1$, ty då behövs ingen återkoppling för att placera polerna, då det ursprungliga systemet redan har rätt poler.

iii. Mätning av $x_1 \iff C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observermarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det \mathcal{O} = 0$ dvs systemet är ej observerbart.
Mätning av $x_2 \iff C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observermarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det \mathcal{O} = -1$ dvs systemet är observerbart.
Välj att mta x_2 ty systemet är observerbart då. Det är lätt att se detta intuitivt också. Om vi mäter x_1 kan vi inte veta något om x_2 men motsatsen är möjlig.

(b) i. Polerna ges av

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Polerna beror ej på V.

ii. Det slutna systemets poler ges av

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda + Vl_1 & Vl_2 - 1 \\ \frac{V^2}{2} l_1 - 1 & \lambda + \frac{V^2}{2} l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{V^2}{2} l_2 + V l_1 \right) \lambda + \frac{V^2}{2} l_1 + V l_2 - 1 = 0$$

Vill ha polerna i -2, -2 vilket innebär $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Identifiering ger att

$$l_1 = \frac{2(8-5V)}{(4-V^2)V}$$
$$l_2 = \frac{4(5-2V)}{(4-V^2)V}$$

Tillståndsåterkopplingen blir $u = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x$.

iii. l_1 och l_2 växer obegränsat då nämnaren går mot noll, dvs $V^* = 0$ eller $4 - (V^*)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ $V^* = 2$

iv. Det går inte att placera egenvärdena godtyckligt för systemet är inte styrbart. Styrbarhetsmatrisen är

$$S = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & \frac{V^2}{2} \\ \frac{V^2}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

och $\det S = V^2(1 - \frac{V^2}{4})$. Vi ser att $\det S = 0$ då $V = 0$ eller $V = 2$ vilket innebär att systemet inte är styrbart.

v. Polpolynomet ges av $\lambda^2 + 2(l_1 + l_2)\lambda + 2(l_1 + l_2) - 1 = 0$ då $V = 2$. Låt det önskade polpolynomet vara $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Identifiering ger

$$\begin{cases} 2(l_1 + l_2) = a \\ 2(l_1 + l_2) = 1 + b \end{cases}$$

Det finns en lösning om båda högerleden är lika, detta uppfylls om $a = 1 + b$. Det önskade polpolynomet ges då av $\lambda^2 + (1 + b)\lambda + b = 0$ som har poler i $\lambda = -1$ och $\lambda = -b$. Man kan alltså inte flytta egenvrdet som ligger i -1 som dock är stabilt, medan det andra egenvärdet kan placeras godtyckligt. Med $b = 2$ fås $a = 3$ och $l_1 + l_2 = 1.5$.

3. (a) Sinus in ger sinus ut eftersom systemet är linjärt.

$$y(t) = |G(2i)| \sin(2t + \arg G(2i))$$

$$|G(2i)| = \frac{4}{\sqrt{1 + (0.5 \cdot 2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg G(2i) = \arg 4 - \arg(0.5 \cdot 2i + 1) = 0 - \arctan \frac{1}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

Svar: $y(t) = 2\sqrt{2} \sin(2t - \frac{\pi}{4})$

(b) i. Proportionell reglering påverkar bara amplitudkurvan (inte faskurvan). Två krav:

- $\Phi_m \geq 30°$ ger att $\omega_c \leq 2$. $K|G(i\omega_c)| \leq 1$. $\omega_c = 2 \Rightarrow |G(i\omega_c)| = 0.2$. Detta ger att $K \leq \frac{1}{0.2} = 5$.
- $A_m > 2$. ω_p (fas-skärfrekvensen) är 4, oberoende av K. $|G(i\omega_p)|K \leq \frac{1}{A_m}$. Detta ger att $0.06K < \frac{1}{2} \iff K < 8.3$.

Svar: $K \leq 5$

ii. Väljer $K = 5$
Enhetssteg ($R(s) = \frac{1}{s}$): Då $G(s)$ innehåller en ren integrator (pol i origo) kommer stationära felet att bli noll, dvs $e_0 = 0$.
Ramp ($R(s) = \frac{1}{s^2}$): Systemet är stabilt så vi kan använda slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s).$$

Med $E(s) = \frac{1}{1+KG} \frac{1}{s^2}$ blir det stationära felet $e_1 = \frac{8 \cdot 2}{10K} = \frac{8}{25} = 0.32$.
Svar: $e_0 = 0$ och $e_1 = 0.32$.

(c) i. Laplacetransformering ger

$$Js^2\theta(s) = F(s) - as\theta(s) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(s) = \underbrace{\frac{1}{s(Js + a)}}_{G(s)} F(s)$$

där systemets överföringsfunktion blir $G(s) = \frac{1}{s(Js+a)}$

ii. Systemet beskrivs av modellen

$$G(s) = \frac{1}{s(\bar{J}s + a)}$$

medan det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = \frac{1}{s((\bar{J} + \delta)s + a)}$$

Det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$ ges då av

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{-\delta s}{(\bar{J} + \delta)s + a}$$

iii. Vi har $F(s) = \frac{1}{4}$ och $G(s) = \frac{1}{s^2+s}$. Den komplimentära känslighetsfunktionen ges då av

$$T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1/4}{s^2 + s + 1/4} = \frac{1/4}{(s + 1/2)^2}$$

Vi konstaterar att $F(s)$ stabiliserar $G(s)$ ty det slutna systemet $G_c(s) = T(s)$ har poler endast i vänstra halvplanet. Vidare har $G(s)$ och $G^0(s)$ samma antal poler i höger halvplan (origo inräknat) då $\delta > 0$, nämligen varsin. Slutligen går både $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ mot noll då $|s|$ går mot oändligheten ty $G(s)$ och $G^0(s)$ har fler poler än nollställen.

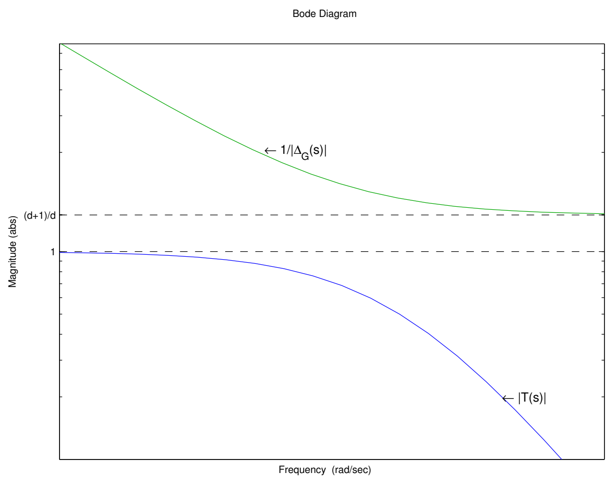
Vi kan då använda robusthetskriteriet för att visa att det återkopplade systemet är robust mot alla $\delta > 0$, dvs att det återkopplade systemet är stabilt för alla val av $\delta > 0$ i $G^0(s)$. Kravet blir då

$$|T(iw)| < \frac{1}{|\Delta_G(iw)|} \quad \forall w$$

där

$$\frac{1}{\Delta_G(s)} = -\frac{(1 + \delta)s + 1}{\delta s}$$

Eftersom $T(s)$ endast har reella poler och inga nollställen kommer amplitudkurvan $|T(iw)|$ vara monotont avtagande för ökande w. Även $1/|\Delta_G(iw)|$ kommer att avta monotont för ökande w eftersom den har lutning -1 för låga frekvenser som bryts upp mot lutning 0 efter dess reella nollställe. Det ger en skiss av $|T(iw)|$ och $1/|\Delta_G(iw)|$ enligt Figur 2.



Figur 2: Skiss av bodediagram för $T(s)$ och $1/\Delta_G(s)$ i uppgift 3c (iii)

Från skissen inser vi att det maximala värdet för $|T(iw)|$ ges av $\lim_{w\to 0} |T(iw)|$ och det minimala värdet för $\frac{1}{|\Delta_G(iw)|}$ ges av $\lim_{w\to\infty} \frac{1}{|\Delta_G(iw)|}$. Eftersom

$$|T(iw)| \le \lim_{w\to 0} |T(iw)| = \lim_{w\to 0} \frac{1/4}{|(iw + 1/2)^2|} = 1$$

$$\frac{1}{|\Delta_G(iw)|} > \lim_{w\to\infty} \frac{1}{|\Delta_G(iw)|} = \lim_{w\to\infty} \left| -\frac{(1 + \delta)iw + 1}{\delta iw} \right| = \frac{1 + \delta}{\delta}$$

är robusthetskriteriet uppfyllt, ty $1 < \frac{1+\delta}{\delta} \quad \forall \delta > 0$.