Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT93)

Tentamensdatum: 7 Januari 2026

1. (a) ”Sin in ger sin ut” för det linjära systemet ges alltså utsignalen av

$$y(t) = |G(2i)| \cdot 4 \sin\big(2t + \arg G(2i)\big)$$

där $|G(2i)| = 2/\sqrt{2^2+3^2} \approx 0.55$ och $\arg G(2i) = -\arctan(2/3) \approx -0.59\,\text{rad}$, dvs $y(t) = 2.2\sin(2t - 0.59)$.

Svar: $y(t) = 2.2\sin(2t - 0.59)$

(b) Ju större den relativa dämpningen ζ är, desto mindre översläng. Detta ger direkt, (i)-D och (ii)-C. Vidare ger större ω_0 snabbare system, alltså (iv)-B och (iii)-A.

Svar: (i)-D, (ii)-C, (iii)-A, (iv)-B

(c) i. Det slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{K50}{s^3+15s^2+50s+K50}$$

Vi får då

$$P(s) = s^3 + 15s^2 + 50s = s(s+5)(s+10)$$
$$Q(s) = 50$$

När detta sker fås genom insättning av $s = iw$ i $P(s) + KQ(s) = 0$, vilket ger

$$P(iw) + KQ(iw) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 50K - iw^3 - 15w^2 + 50iw = 0$$

Uppdelning i imaginär- och realdel ger

$$-w^3 + 50w = 0$$
$$50K - 15w^2 = 0$$

Den första av dessa ekvationer ger två möjligheter, $w = 0$ och $w^2 = 50$. Insatt i den undre ekvationen ger detta $K = 0$ och $K = 15$. Vi har alltså tre skärningar med imaginära axeln, vid $w = 0$ för $K = 0$ (dvs en av startpunkterna) och vid $w = \pm\sqrt{50}$ för $K = 15$. Därmed befinner sig för $0 < K < 15$ alla poler i vänster halvplan och det återkopplade systemet är för dessa värden på K stabilt.

Snabbheten hos det återkopplade systemet ges av den dominerande polens avstånd till origo. Enligt rotorten ökar detta avståndet med ökande K och sålunda ökar även snabbheten. För små K är alla poler reella, medan för stora K blir två poler komplexa. Systemet är alltså väl dämpat för små K men oscillativt för stora K. För $K > 15$ växer dessa oscillationer obegränsat och systemet blir instabilt.

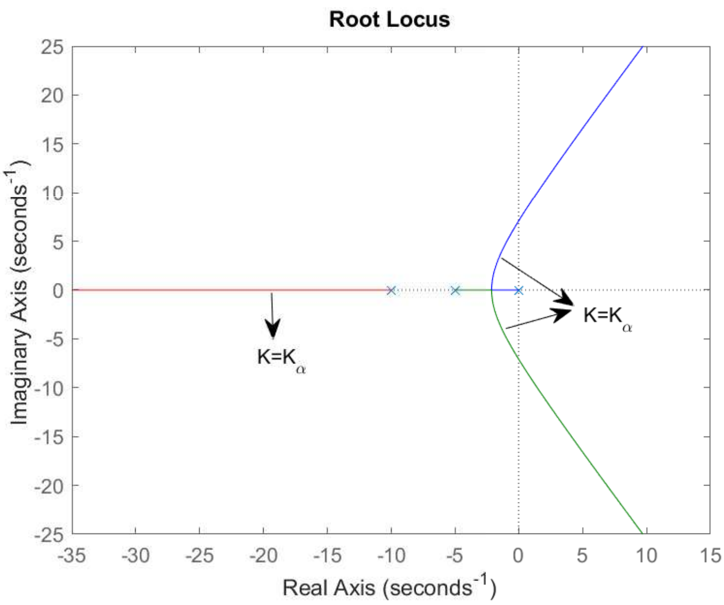
ii. Eftersom systemet innehåller en integrator kommer det stationära felet med ett steg som refererenssignal att gå mot noll så länge återkopplingen är stabil.

Detta kan även ses med slutvärdesteoremet. Laplacetransformen för rampen $r(t) = t$ är $R(s) = 1/s^2$. Det stationära felet för det återkopplade systemet med en P-regulator där $K > 0$ blir därför enligt slutvärdesteoremet

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s)$$
$$\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{s^2(s+5)(s+10)}{s(s+5)(s+10)+50K}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

Från del (i) vet vi att det återkopplade systemet är stabilt endast för $0 < K < 15$. Eftersom

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$



Figur 1: Rotort för det slutna systemet med markerat möjligt värde på $K = K_\alpha$.

gäller, fås det minsta stationära felet när K väljs så stort som möjligt, dvs $K \to 15$. Då blir

$$e_{ss,\min} = \frac{1}{15} \approx 0.067.$$

Det går alltså inte att välja något $K > 0$ (som ger stabil återkoppling) så att $\lim_{t\to\infty} e(t) < 0.01$.

iii. Av figuren ser vi att det stationära felet är ungefär $e_{ss} \approx 0.1$, vilket innebär att $K \approx 10$ eftersom $e_{ss} = \frac{1}{K}$.

Vidare ser vi av rampsvaret att utsignalen har en oscillativ (sinusformad) komponent, vilket betyder att det slutna systemets poler är komplexa.

Ett möjligt värde $K = K_\alpha \approx 10$ markeras därför på rotorten i figur 1. För detta värde på K_α ligger två av polerna som ett komplexkonjugerat par i vänster halvplan, medan den tredje polen ligger på den reella axeln längre till vänster. Detta stämmer överens med ett stabilt men svagt oscillativt rampsvar.

2. (a) Med den givna återkopplingen fås det återkopplade systemets poler som noll ställena till den karaktäristiska ekvationen

$$\det\big(Is - (A - BL)\big) = \det\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -2+l_1 & s-1+l_2 \end{pmatrix} = (s+1)(s-1+l_2).$$

Den stabila polen i -1 kan inte flyttas alltså kan inte polerna placeras godtyckligt (ej styrbart), men den andra polen kan placeras godtyckligt med l_2 och det återkopplade systemet går alltså att få stabilt.

Svar: Systemet är stabiliserbart, men ej styrbart.

(b) i. Med de givna tillståndsvariablerna fs $\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$ och $\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u$ vilket ger **Svar:**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

ii. Tillståndsåterkopplingen $u = -Lx$ ger att det återkopplade systemet får den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 + l_2\lambda + l_1 = 0$. Polplacering i $-a$ motsvarar den önskade ekvationen $(\lambda + a)^2 = \lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$. Jämförelse ger

Svar: $l_1 = a^2$ och $l_2 = 2a$.

iii. Styrsignalen har en extrempunkt ($\dot{u}(t) = 0$) vid $t = 2/a$ med värdet $u(2/a) = -a^2 e^{-2}\theta_0$. Vidare gäller att $u(t) \to 0$ då $t \to \infty$ samt $u(0) = a^2\theta_0$. Styrsignalens absolutbelopp är alltså störst vid $t = 0$. Villkoret ger $a^2\theta_0 \le 10$ dvs $a \le \sqrt{10/\theta_0}$.

Svar: En stor förflyttning (θ_0 stor) medför att a måste väljas litet (långsamt system) för att momentgränsen ej skall överskridas.

iv. Den karakteristiska ekvationen för allmänt J är $\lambda^2 + \frac{1}{J}2a\lambda + \frac{1}{J}a^2 = 0$. Jämförelse med ekvationen $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ ger $\zeta = 1/\sqrt{J}$.

Svar: Större tröghetsmoment $J > 1$ medför att den relativa dämpningen minskar, dvs systemet blir oscillativt. Om kravet är att armen skall styras utan överslängar är det alltså allvarligare om det verkliga tröghetsmomentet är större än det som antagits.

3. (a) De faktorer som i praktiken begränsar vilka prestanda ett reglersystem kan ges är: Begränsad styrsignal, Mätstörningar och Modellfel.

(b)
- Snabbheten (stigtiden) hos det återkopplade systemets stegsvar är relaterad till bandbredden hos $\mid T(i\omega) \mid$. En hög bandbredd ger en kort stigtid. Bandbredden hos det återkopplade systemet är relaterad till skärfrekvensen hos $G_O(i\omega)$. Bandbredden är normalt av samma storleksordning som skärfrekvensen.
- Svängigheten (överslängen) hos det återkopplade systemet är relaterad till resonanstoppar hos $\mid T(i\omega) \mid$. En hög resonanstopp ger en stor översläng. Resonanstoppens höjd är relaterad till fas- och amplitudmarginal hos $G_O(i\omega)$. En liten fas- eller amplitudmarginal ger stor resonanstopp.
- Felkoefficienten för det återkopplade systemet är relaterad till den statiska förstärkningen $T(0)$. Felkoefficienten är noll om $T(0) = 1$. Den statiska förstärkningen hos $T(s)$ relaterad till den statiska förstärkningen hos $G_O(s)$.

(c) i. Det slutna systemet $G_c(s)$ är överföringsfunktionen från r till y, dvs $Y(s) = G_c(s)R(s)$. Eftersom det slutna systemet har statisk förstärkning 1 så kommer även utsignalen att gå mot 1 enligt slutvärdesteoremet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)R(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)\frac{1}{s} = G_c(0) = 1$$

ii. Känslighetsfunktionen $S(s)$ är överföringsfunktionen från v till y, dvs $Y(s) = S(s)V(s)$. Vi kan nu använda oss av att det faktum att för ett stabilt linjärt system så får vi för en sinus-signal in, en sinus-signal ut, när transienterna har dött ut. Utsignalen kommer att ha följande utseende

$$y(t) = |S(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg S(\omega_0 i)) \quad \text{nr} \quad v(t) = \sin(\omega_0 t)$$

Här analyserar vi en störning med frekvens $\omega_0 = 1$[rad/s]. Ur bodediagrammet för $S(s)$ kan vi avläsa

$$|S(i \cdot 1)| \approx 4 \text{ dB} = 10^{(4/20)} \approx 1.6$$
$$\arg S(1 \cdot i) \approx 45^\circ$$

och därmed

$$y(t) \approx 1.6 \sin(t + 45^\circ)$$

iii. Eftersom superpositionsprincipen gäller för linjära system har vi nu $Y(s) = G_c(s)R(s) + S(s)V(s)$. Genom att kombinera resultaten i 2a) och 2b) fås därför

$$y(t) \approx 1.6 \sin(t + 45^\circ) + 1$$

iv. överföringsfunktionen från $-n$ till y ges av den komplementära känslighetsfunktionen $T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = G_c(s)$. Förstärkningen av mätbruset kan därför bestämmas ur bodediagrammet för det slutna systemet G_c. Därur kan vi avläsa att mätbruset dämpas för frekvenser $\omega > 10$ [rad/s] eftersom $|G_c(i\omega)| < 1$ för dessa ω.

v. Det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = \alpha \cdot G(s)$$

Det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$ ges då av

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_G(s) = \alpha - 1 = 0.1$$

Vi konstaterar att $F(s)$ stabiliserar $G(s)$ ty det kretsförstärkningen $F(s)G(s)$ har positiv fasmarginal. Vidare har $G(s)$ och $G^0(s)$ samma antal poler i höger halvplan eftersom endast en konstant skiljer dem åt. Slutligen går både $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ mot noll då $|s|$ går mot oändligheten enligt bodediagrammet för $F(s)G(s)$.

Enligt robusthetskriteriet är då det sanna återkopplade systemet stabilt så länge $\alpha - 1 = 0.1 < \frac{1}{|T(i\omega)|} = \frac{1}{|G_c(i\omega)|}$ för alla ω. Detta är de facto uppfyllt eftersom $|G_c(i\omega)| < 10 = 20$ dB enligt bodediagrammet för $G_c(s)$.