Lösningar till tentamen i TSRT93 Reglerteknik

Tentamensdatum: 5 juni 2026

Datum för denna version av lösningsförlsaget: 22 maj 2026

Uppgift 1

a)

Exempelvis:

Referens $r(t)$: Den önskade ugnstemperaturen, justeras typiskt via ett vred på spisens framsida.

Utsignal $y(t)$: Temperatur uppmätt inne i ugnen.

Styrsignal $u(t)$: Ström som används för att skapa värme i ugnselementet.

Modell: En fysikalisk beskrivning för hur en viss ström skapar en temperatur på värme-elementet i ugnen, och hur denna sedan sprider värme i ugnen (konvektion, strålning, etc.). Vanligtvis en differentialekvation som beskriver förändring i temperatur (dvs $\dot{y}(t)$) som funktion av pålagd ström ($\dot{u}(t)$) och nuvarande temperatur $y(t)$ (och kanske störningar i en mer komplett modell). (Alternativt har man via t.ex stegssvarsexperiment tagit fram en differentialekvation som beskriver samma sak, utan att reglerteknikern behöver känna till termodynamik etc.)

Störningar: Ugnen öppnas och kall luft kommer in. En iskall älgstek ställs in och sprider kyla.

b)

En mycket dålig affär. Mikrofonen är beskriven som ett lågpassfilter med en bandbredd på 2π rad/s (1 Hz), dvs förstärkningen är omkring 1 upp till bandbredden (där den är $1/\sqrt{2}$) och sedan faller förstärkningen av snabbt. Ljud signifikant över 1 Hz (t.ex 10 Hz och uppåt) skulle sålunda filtreras bort nästan helt. Mikrofonen skulle därmed filtera bort allt ljud som det mänskliga örat kan uppfatta.

c)

Vi skriver om regulatorerna enligt $F_1(s) = 1 + \frac{0.1}{s} + 2s$ och $F_2(s) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$ och drar slutsatsen att $F_1(s)$ är en PID-regulator på formen $K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$. Däremot är inte $F_2(s)$ en PID-regulator (den implementerar en dubbelintegrator av något slag och saknar D-del).

d)

i)

Från figuren i uppgiften fås

$$E(s) = -G(s)F(s)E(s) + R(s) - 0.2G(s)V(s) \iff$$
$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) = \frac{1}{1+G(s)K}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)K}V(s).$$

Den efterfrågade överföringsfunktionen är alltså $-0.2G(s)/(1+G(s)K)$.

ii)

Eftersom systemet är linjärt gäller att "sinus in ger sinus ut". Här gäller alltså att välja K så att

$$\left| -\frac{0.2G(0.1i)}{1+G(0.1i)K} \right| \leq 0.1.$$

Insättning av de givna värdena resulterar i kravet $K \geq \sqrt{3} - 0.2 \approx 1.53$.

iii)

Stegsvar B och C har stationära fel. Alltså saknas integratorverkan, och de måste därför paras ihop med (ii) och (iii). Eftersom felet minskar med växande K_P gäller att B–(ii), C–(iii).

För de två kvarvarande ger $K_I > 0$ att det stationära felet elimineras, men ett större K_I ger ett mera svängigt system. Därmed gäller att A–(iv), D–(i).

Uppgift 2

a)

Nollställepolynomet har 100 nollställen repeterade i -1 och är i utvecklad form ett polynom av gradtal 100. Pol-polynomet har 200 poler repeterade i -3 och är i utvecklad form ett polynom av gradtal 200. Valfri kanonisk form (styrbar/observerbar) kan t.ex användas för att skriva modellen i tillståndsform, och den modellen skulle behöva 200 tillstånd. (I praktiken skulle man inte använda en kanonisk form utan utnyttja den speciella formen för att slippa att först utveckla polynomet.)

b)

Med $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ får vi $A - BL = \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 2 - l_2 \\ 2 - 2l_1 & -1 - 2l_2 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till denna matris ges av lösningarna till det $(\lambda I - (A - BL)) = 0$, dvs det $\left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 + l_1 & -2 + l_2 \\ -2 + 2l_1 & \lambda + 1 + 2l_2 \end{bmatrix} \right) = 0$. Förenkling leder till $\lambda^2 + \lambda(2 + l_1 + 2l_2) + (-3 + 5l_1 + 4l_2) = 0$. Detta jämförs med det önskade polpolynomet $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ och lösning av det uppkomna ekvationssystemet leder till $l_1 = 1, l_2 = 0.5$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet ges av $C(sI - (A - BL))^{-1} B l_0$ vilken har statisk förstärkning $-C(A - BL)^{-1} B l_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} l_0 = \frac{5}{4} l_0$. För att undvika stationärt reglerfel vid konstant referenssignal krävs att den statiska förstärkningen är 1, och således väljs $l_0 = \frac{4}{5}$.

c)

Stabilitet (som avgör om skattningsfelet går mot noll) hos observatör avgörs av egenvärdena till skattningsfelens dynamiska modell, $A - KC$, där C är den matris som beskriver vilka mätvärden som används. Vi vet inte om vi mäter $x_1(t)$ (motsvarande $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$) eller $x_2(t)$ (motsvarande $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$). Med $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ ges observatörsdynamiken för dessa olika fall av

$$
\begin{aligned}
A - KC_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 2 \\ 2 - k_2 & -1 \end{bmatrix} \\
A - KC_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 - k_1 \\ 2 & -1 - k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Egenvärdena för de två fallen ges av lösningarna till

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 + \lambda(2 + k_1) + (-3 + k_1 + 2k_2) &= 0 \\
\lambda^2 + \lambda(2 + k_2) + (-3 + 2k_1 + k_2) &= 0
\end{aligned}
$$

Lösningarna till en andragradsekvation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har stabila rötter om och endast om a och b är positiva. Om vi väljer k_1 och k_2 så att $2 + k_1 > 0$, $2 + k_2 > 0$, $-3 + k_1 + 2k_2 > 0$ samt $-3 + 2k_1 + 2k_1 > 0$ så är båda uppställningarna stabila (t.ex $k_1 = k_2 = 5$).

Uppgift 3

a)

Figurerna B och D är svängiga (samt har översläng), vilket betyder att bode-diagrammen för deras slutna system har en resonanstopp, vilket Figurerna III och IV har. Figur III har störst resonanstopp och hör därför till figur B, som är mest svängig. Figur IV hör därmed till Figur D. Av Figur A och C har A snabbast stigtid, och bode-diagrammet för dess slutna system är därför II eftersom den har störst bandbredd av Figur I och II Figur C hör därmed till Figur I.

b)

i)

Det verkliga systemet beskrivs av

$$G^0(s) = \frac{1+\alpha}{s(s+1)},$$

och regulatorn väljs till

$$F(s) = K = 4$$

Då fås det verkliga slutna systemet

$$G_C^0(s) = \frac{G^0(s)F(s)}{1+G^0(s)F(s)} = \frac{4(1+\alpha)}{s(s+1)+4(1+\alpha)}.$$

Polerna är i vänstra halvplanet om och endast om alla koefficienter till andragradaren är positiva, vilket leder till $\alpha > -1$.

ii)

Det relativa modellfelet $\Delta(s)$ ges av

$$\begin{aligned} G^0(s) &= G(s)(1+\Delta(s)) \iff \\ \frac{1+\alpha}{s(s+1)} &= \frac{1}{s(s+1)}(1+\Delta(s)) \iff \\ 1+\alpha &= 1+\Delta(s) \iff \\ \Delta(s) &= \alpha \end{aligned}$$

iii)

Enligt robusthetskriteriet garanteras det återkopplade systemet vara stabilt om

$$|\Delta(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall\omega,$$

där komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ definieras från den nominella modellen enligt

$$T(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{4}{s^2+s+4}.$$

Kriteriet blir då

$$|\alpha| < \left|\frac{(i\omega)^2+i\omega+4}{4}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{(4-\omega^2)^2+\omega^2} \quad \forall\omega$$

Kriteriet på α är således det lägsta värdet man kan få på högerledet. Vi introducerar $a = \omega^2$ och minimerar uttrycket som är under kvadratroten:

$$\begin{aligned} \min_a g(a) &= (4-a)^2 + a \iff \\ g'(a) = -2(4-a)+1 &= 0 \iff \\ -7+2a &= 0 \iff \\ a = \omega^2 &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Detta värde på ω^2 ger det lägsta värdet på högerledet i kriteriet, som blir

$$|\alpha| < \frac{1}{4}\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \approx 0.484.$$

Robusthetskriteriet garanterar att det återkopplade systemet är stabilt för $-.484 < \alpha < 0.484$.

iv)

Robusthetskriteriet är ett tillräckligt kriterium, men inte nödvändigt, så systemet kan vara stabilt trots att kriteriet inte uppfylls. Kriteriet att alla poler ligger i vänster halvplan är både tillräckligt och nödvändigt, så systemet är asymptotiskt stabilt om det kriteriet uppfylls och instabilt om det inte uppfylls.