

Lösningar till tentamen i TSRT93 Reglerteknik

Tentamensdatum: 20 augusti 2026

Datum för denna version av lösningsförlsaget: 29 juni 2026

Uppgift 1

a)

I och II påvisar oscillationer och kopplas därför till C och D som har komplexa poler. II är snabbare än I, och D har polerna längre bort från origo än C. Således gäller att I-C, II-D.

Det kvarstår att para ihop III och IV med A och B. III är dubbelt så snabbt som IV, och B har polerna dubbelt så långt bort från origo som A. Därmed har vi III-B, IV-A.

b)

Eftersom vi enbart är intresserade av överföringsfunktionen från r till y kan vi enligt superpositionsprincipen strunta i signalen som betecknas $u_{1,ref}$. Vi sätter den således till noll för att slippa ha med den i beräkningarna. Vi har

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) \\ &= G_1(s)F_1(s)(R(s) - Y(s)) + G_2(s)F_2(s)(0 - F_1(s)(R(s) - Y(s))) \\ &= (G_1(s)F_1(s) - G_2(s)F_2(s)F_1(s))(R(s) - Y(s)) \end{aligned}$$

Låt nu $G_3(s) = (G_1(s) - G_2(s)F_2(s))F_1(s)$, så att vi har $Y(s) = G_3(s)(R(s) - Y(s))$. Detta implicerar att $Y(s) = \frac{G_3(s)}{1+G_3(s)}R(s)$.

c)

Överföringsfunktionen från v till y ges, eftersom $U(s) = -F(s)Y(s)$, av att

$$Y(s) = G(s)(V(s) - F(s)Y(s)) \iff Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}V(s).$$

Med en P-regulator $F(s) = K$, $K > 0$ får det slutna systemet, efter förenkling, överföringsfunktionen

$$G_C(s) = \frac{9}{s^2 + 1.2s + 9 + 9K}.$$

Det slutna systemet är stabilt för alla $K > 0$, och slutvärdessatsen ger att slutvärdet blir a gånger det slutna systemets statiska försträckning. Slutvärdet är alltså

$$aG_C(0) = a\frac{9}{9 + 9K} = \frac{a}{1 + K}.$$

d)

The stationära felet kan elimineras genom att introducera en integrerande del i regulatorn. En PI-regulator, till exempel, skulle fungera.

Uppgift 2

a)

Enligt blockschemat har vi att

$$\begin{aligned}P(s) &= \frac{1}{cs} (K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)), \\Y(s) &= \frac{1}{ms} (aP(s) - bY(s)),\end{aligned}$$

vilket kan skrivas

$$\begin{aligned}sP(s) &= \frac{1}{c} (K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)), \\sY(s) &= \frac{1}{m} (aP(s) - bY(s)).\end{aligned}$$

Vi kan nu inverstransformera detta

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \frac{K_q}{c} u(t) - \frac{K_c}{c} p(t) - \frac{a}{c} y(t), \\ \dot{y}(t) &= \frac{a}{m} p(t) - \frac{b}{m} y(t),\end{aligned}$$

vilket kan skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{b}{m} x_1(t) + \frac{a}{m} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{a}{c} x_1(t) - \frac{K_c}{c} x_2(t) + \frac{K_q}{c} u(t).\end{aligned}$$

b)

Om samtliga konstanter sätts till ett fås modellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u, \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C x,\end{aligned}$$

och det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BL)x + Br, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till

$$A - BL = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 - l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. av att

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (2 + l_2)\lambda + 2 + l_1 + l_2 = 0.$$

Enligt förutsättningarna ska systemets poler ligga i $-2+2i$ och $-2-2i$, vilket leder till den karaktäristiska ekvationen

$$(\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i) = \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0.$$

Identifikation leder nu till att $l_1 = 4, l_2 = 2$. Återkopplingen ges alltså av

$$u(t) = -4x_1(t) - 2x_2(t) + r(t) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}}_L x(t) + r(t).$$

c)

Slutna systemet med PD-regulatorn ges av $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}R(s) = \frac{K_P+K_Ds}{s^2+(K_D+1)s+K_P}R(s)$. Polpolynomet som definierar polerna ges alltså av $s^2 + (K_D + 1)s + K_P$. Polerna till det tillståndsåterkopplade systemet definieras av $\det(sI - (A - BL)) = 0$, och det gäller att

$$sI - (A - BL) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_1 & s+1+l_2 \end{bmatrix}.$$

Determinantberäkning ger oss att $s^2 + (1 + l_2)s + l_1 = 0$, varifrån det följer att vi kan få samma poler/egenvärden om vi använder $K_D = l_2$ och $K_P = l_1$. Det slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$\begin{aligned} C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_1 & s+1+l_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + (1 + l_2)s + l_1} \begin{bmatrix} s + l_1 + l_2 & 1 \\ -l_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_0 \\ &= \frac{l_0}{s^2 + (1 + l_2)s + l_1}. \end{aligned}$$

För att få statisk förstärkning 1 väljs $l_0 = l_1$. De två systemen skiljer sig åt i sina nollställen. Skillnaden uppkommer då tillståndsregulatorn ej deriverar referenssignalen.

d)

Vi är intresserade av det andra tillståndet, låt oss kalla det $z = \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} = M\hat{x}$. Med $r(t) = 0$ får vi systemet

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(-L\hat{x}) + K(y - C\hat{x}), \\ z &= M\hat{x}. \end{aligned}$$

En liten förenkling ger att

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - BL - KC)\hat{x} + Ky, \\ z &= M\hat{x}, \end{aligned}$$

och överföringsfunktionen från y till z ges av

$$M(sI - (A - BL - KC))^{-1}K.$$

Uppgift 3

a)

III och IV har statisk förstärkning 1. Detta kan bara erhållas om det öppna systemet har oändlig förstärkning i $\omega = 0$ (eftersom slutna systemet ges av $\frac{G(0)}{1+G(0)}$), vilket C och D ser ut att ha. C har stor fasmarginal D har liten fasmarginal. III har ingen resonanstopp, IV har en signifikant resonanstopp. Slutsatsen blir att C-III, D-IV.

Statiska förstärkningen för det öppna systemet A är $-20 \text{ dB} = 0.1$, vilket gör att slutna systemet skall ha statisk förstärkning $0.1/(1 + 0.1) = -21 \text{ dB}$. Statiska förstärkningen för öppna systemet B är 1, vilket gör att slutna systemet skall ha statisk förstärkning $1/(1 + 1) = 0.5 = -6 \text{ dB}$. Detta ger direkt att A-II, B-I.

b)

Exempelvis:

Styrsignal $u(t)$: den kraft som läggs på rullarna för att pressa ihop dom. Alternativt, den spänning/ström som läggs på den motor som alstrar denna kraft. Beror på vilken abstraktionsnivå man vill titta på.

Utsignal $y(t)$: Plåtens tjocklek uppmätt efter rullarna.

Referenssignal $v(t)$: önskad plåttjocklek.

En lämplig reglerstruktur är återkoppling av reglerfelet $U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$. Notera att en enkel P-regulator förmodligen inte fungerar så bra eftersom den kraften som läggs på rullarna skulle bli noll då reglerfelet är noll, d.v.s. då reglerfelet närmar sig noll så går kraften mot noll, och vi kommer förmodligen få ett stationärt fel. I stationärt läge krävs det nog någon slags grundkraft. En tänkbar lösning är att använda en PI-regulator. (Jämför med farthållare på bil som ej kan göras bra med enkel P-regulator, eftersom den släpper gasen helt då referenshastighet uppnås).

c)

I låga frekvenser lutar amplitudkurvan med ca -20 dB/dekad, d.v.s. lutning -1 om vi tar bort faktorn 20 som kommer från dB. Vi ser även att fasen går mot -90° . Enligt skissreglerna i kursboken dras slutsatsen att systemet måste innehålla en pol i origo. För höga frekvenser lutar amplitudkurvan med -40 dB/dekad (lutning -2), och fasen går mot -180° . Ytterliggare en pol finns alltså i systemet. Lutningen ändras från -1 till -2 omkring 100 rad/s, och systemet torde således vara $\frac{K}{s(1+s/100)}$. Konstanten K kan vi få från att evaluera överföringsfunktionen i godtycklig punkt. Tex har vi att $|G(i1)| = 40$ dB $= 10^{40/20} = 100$. Amplituden ges av $\left| \frac{K}{1i(1+i/100)} \right| = \left| \frac{K}{1\sqrt{1+0.01^2}} \right|$. Lösning av $100 = \left| \frac{K}{1\sqrt{1+0.01^2}} \right|$ ger $K = 100\sqrt{1.0001}$.

d)

Den periodiska signalen förstärks med $|G(10i)| = \left| \frac{100}{(10i)^2 + 10i + 100} \right| = \left| \frac{100}{-100 + 10i + 100} \right| = 10$. Amplituden på utsignalen kommer således vara $2 \cdot 10 = 20$.

e)

Robusthetskriteriet kräver en relativ modellfelsbeskrivning $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta(s))$. Vi skriver

$$G^0(s) = \frac{2 + \gamma}{s^3 + 7s^2 + 4s} = \frac{2(1 + \gamma/2)}{s^3 + 7s^2 + 4s} = G(s)(1 + \gamma/2)$$

och inser att det relativa modellfelet ges av $\gamma/2$. Robusthetskriteriet blir $|\gamma/2| \leq \frac{1}{|T(i\omega)|}$. Detta skall gälla i alla frekvenser, och eftersom vänsterledet är konstant, så måste det speciellt gälla då högerledet är som minst, d.v.s. när $|T(i\omega)|$ är som störst. Vi ser att det största värdet ges av 1 dB $= 1.12$. Kravet blir att $|\gamma| \leq \frac{2}{1.12} = 1.79$.