Reglerteknik, Föreläsning 10: Specifikationer och Stabilitet i Frekvenskplanet

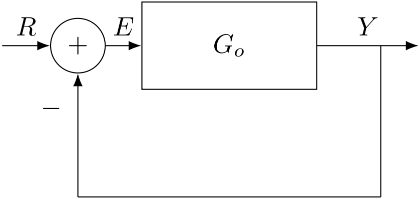
Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

1. Stabilitet
2. Amplitud- och fasmarginal
3. Samband mellan specifikationer i tidsplan och frekvensplan

Återkopplat System



Återkopplade systemets frekvensfunktion

$$T(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)} = \frac{|G_o(i\omega)|e^{i\phi(\omega)}}{1 + |G_o(i\omega)|e^{i\phi(\omega)}}$$

där $\phi(\omega) = \arg G(i\omega)$. Nämnaren är noll då

$$|G_o(i\omega)|e^{i\phi(\omega)} = -1$$

som är det samma som

$$|G_o(i\omega)| = 1 \text{ och } \phi(\omega) = -180^\circ$$

Amlitud- och Fasmarginal

Låt *skärfrekvensen* ω_c definieras av

$$|G_o(i\omega_c)| = 1$$

och *fasskärfrekvensen* ω_0 definieras av

$$\phi(\omega_0) = -180^\circ$$

Amlitudmarginalen är

$$A_m = 1/|G_o(i\omega_0)|$$

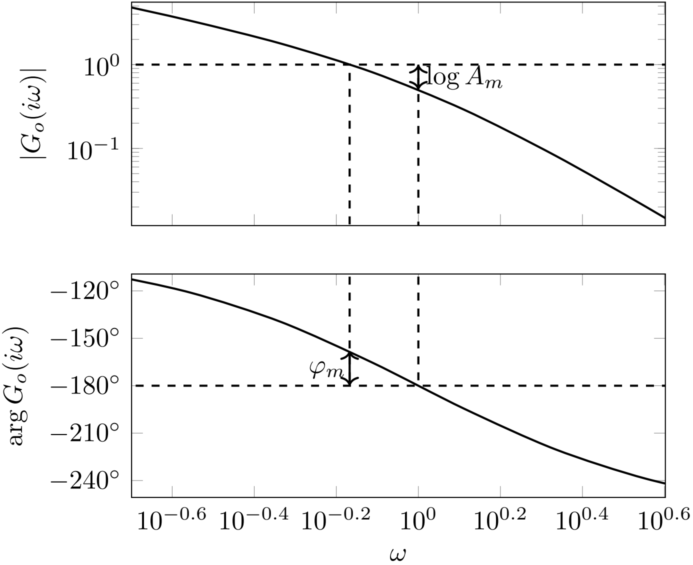
Fasmarginalen är

$$\phi_m = 180^\circ - \phi(\omega_c)$$

Slutna systemet är insignalutsignalstabilt om $A_m > 1$ och $\phi_m > 0^\circ$. (Nästan sant)

Då $A_m = 1$ och $\phi_m = 0^\circ$ så är nämnaren för $T(i\omega)$ noll.

Amlitud- och Fasmarginal i Bodediagram



Stabilitetskriteriet sant då amplitud- och faskurvorna avtagande.

Ytterligare Förstärkning i Kretsförstärkningen

Om $G_o(s)$ ersätts med $A_m G_o(s)$ så blir amplitudmarginalen för $A_m G_o(s)$ lika med ett.

Amplitudmarginalen anger alltså hur mycket ytterligare förstärkning man kan ha i kretsförstärkningen innan man når gränsen för instabilitet.

Ytterligare Tidsfördröjning i Kretsförstärkningen

Det gäller att φ_m är lösningen till

$$G_o(i\omega_c)e^{-i\varphi_m} = -1$$

Överföringsfunktionen för en tidsfördröjning τ ges av $e^{-\tau s}$.

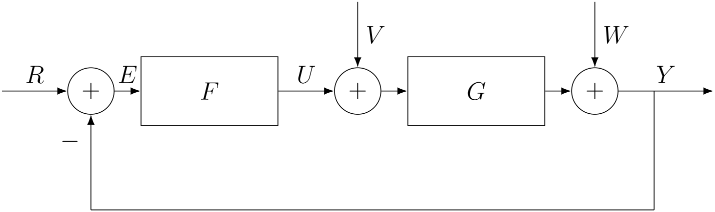
Om man introducerar en ytterligare tidsfördröjning τ i kretsförstärkningen så modifieras kretsförstärkningen till $G_o(s)e^{-s\tau}$.

Vid stabilitetsgränsen gäller

$$-1 = G_o(i\omega_c)e^{-i\varphi_m} = G_o(i\omega_c)e^{-i\omega_c\tau}$$

Alltså ges den maximala ytterligare tidsfördröjningen av $\tau = \varphi_m/\omega_c$.

Slutet System



$$Y(s) = T(s)R(s) + G(s)S(s)V(s) + S(s)W(s)$$
$$U(s) = F(s)S(s)R(s) - T(s)V(s) - F(s)S(s)W(s)$$

där $S(s)$ är känslighetsfunktionen och $T(s)$ är den komplementära känslighetsfunktionen, d.v.s.

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}, \quad T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

där kretsförstärkningen $G_o(s)$ är

$$G_o(s) = F(s)G(s)$$

Fysikaliska Begränsingar

Idealt önskas $Y(s) = R(s)$, vilket fås om $T(s) = 1$ och $S(s) = 0$.

Kräver att $G_o(s) = \infty$, vilket inte är fysikaliskt möjligt.

Nöjer oss med $G_o(s)$ stor. Om inte $G(s)$ själv är stor så behöver $F(s)$ vara stor. Detta kommer att resultera i stora styrsignaler eftersom $U(s)$ beror på $F(s)S(s)$ och

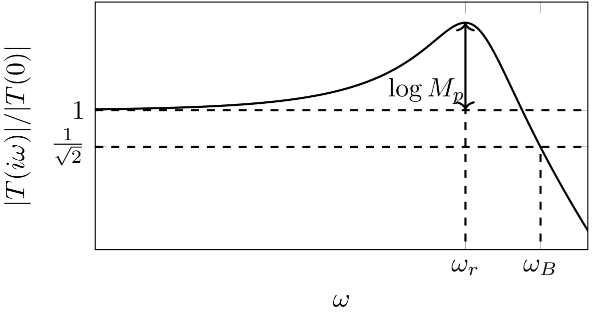
$$F(s)S(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{F(s)} + G(s)} \approx \frac{1}{G(s)}$$

om $F(s)$ är stor. Alltås är $F(s)S(s)$ stor när $G(s)$ är liten, vilket den oftast är för stora värden på s av fysikaliska skäl.

Alltså får $F(s)$ inte vara stor för stora värden på s.

Slutsats: $T(s)$ är nära ett och $S(s)$ är nära noll endast för begränsade värden på s.

Komplementära Känslighetsfunktionen



Bandbredden ω_B definieras som det största ω_B sådant att

$$|T(i\omega)|/|T(0)| \geq 1/\sqrt{2}, \quad \forall \omega \in [0, \omega_B]$$

Resonansfrekvensen ω_r definieras av

$$\max_{\omega} |T(i\omega)| = |T(i\omega_r)|$$

Vi kallar $M_p = |T(i\omega_r)|/|T(0)|$ för *resonanstoppen*.

Amplitudkurvan för $S(s)$ följer från $S(s) + T(s) = 1$.

Exempel på Bandbredd

Låt

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Då gäller att

$$|T(i\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}$$

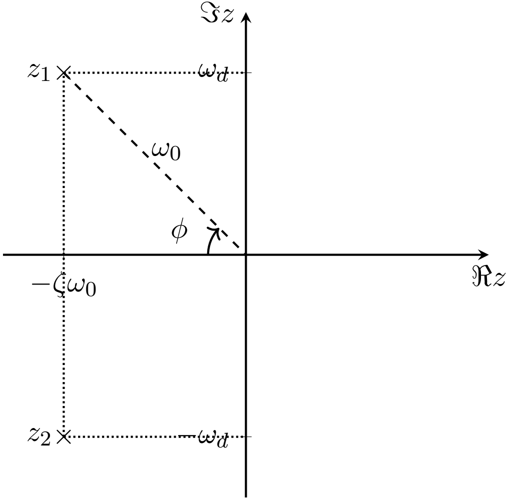
Bandbredden är lösningen till

$$|T(i\omega_B)|^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} = 2$$

som har lösningen

$$\omega_B = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + \left(1 - 2\zeta^2\right)^2}}$$

Relation mellan Bandbredd och Poler



Bandbredden ω_B är lika med ω_0 för $\zeta = 1/\sqrt{2}$. För andra värden på ζ är ω_B inte långt från ω_0. Bandbredden är alltså ungefär lika med polernas avstånd till origo.

Exempel på Resonanstopp

Nämnaren för $|T(i\omega)|^2$ ges av

$$g(\omega) = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2$$

och minimeras för ω som satisfierar

$$g'(\omega) = 4\omega\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + 8\zeta^2\omega_0^2\omega = 0$$

från vilket fås

$$\omega_r = \begin{cases} \sqrt{1-2\zeta^2}\omega_0, & 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, & \zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Detta ger resonanstoppen

$$M_p = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, & 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1, & \zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Resonanstoppens storlek beror endast på ζ. Lägre ζ ger större resonanstopp.

Bandbredd och Skärfrekvens

Det gäller att

$$
\begin{aligned}
|T(i\omega_c)| &= \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1+G_o(i\omega_c)|} = \frac{1}{|1+G_o(i\omega_c)|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1+|G_o(i\omega_c)|\cos\phi(\omega_c))^2 + |G_o(i\omega_c)|^2\sin^2\phi(\omega_c)}}
\end{aligned}
$$

och

$$\frac{|T(i\omega_B)|}{|T(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Om $|T(0)| \approx 1$ and $\phi(\omega_c)$ är liten, så $\omega_c \approx \omega_B$.

Resonanstopp och Fasmarginal

Det gäller att

$$|G_o(i\omega_c)| = 1, \quad \arg G_o(i\omega_c) = -\pi + \varphi_m$$

Detta gör att vi kan skriva $G_o(i\omega_c) = -\cos\varphi_m - i\sin\varphi_m$. Från detta erhåller vi

$$|1 + G_o(i\omega_c)|^2 = (1 - \cos\varphi_m)^2 + (\sin\varphi_m)^2 = 4\left(\sin\frac{\varphi_m}{2}\right)^2$$

Härav följer att

$$|T(i\omega_c)| = \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}}$$

Resonansfrekvensen ω_r maximerar $|T(i\omega)|$ och därför gäller

$$M_P \geq \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}}$$

Från detta följer att vi måste kräva en tillräckligt stor fasmarginal för att inte riskera att få en för stor resonanstopp.

Exempel

Låt kretsförstärkningen vara

$$G_o(s) = \frac{\omega_0^2}{s\left(s + 2\zeta\omega_0\right)}$$

Då ges den komplementära känslighetsfunktionen av

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Skärfrekvensen är lösningen till

$$|G_o(i\omega_c)|^2 = \frac{\omega_0^4}{\omega_c^2\left(\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\right)} = 1$$

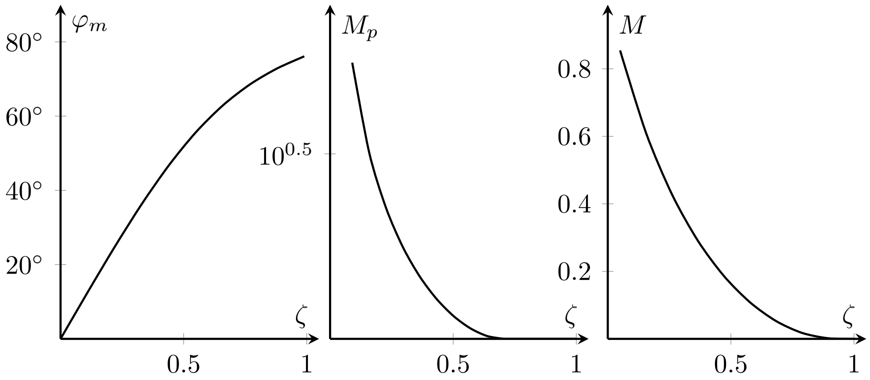
som är

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

Fasmarginalen är

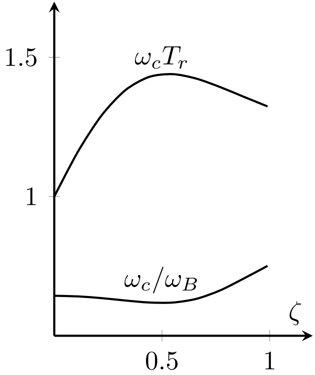
$$\varphi_m = \arg G_o(i\omega_c) + \pi = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_0} = \arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

Plotar för Fasmarginal, Resonanstopp och Översläng



Vi ser att översläng och resonanstopp är starkt korrelerade, om än med olika skalor på y-axeln. Vidare ser vi att resonanstopp och översläng är ungefär omvänt proportionella mot fasmarginalen.

Plotar för ω_c/ω_B och $\omega_c T_r$



$$\omega_c/\omega_B = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1-2\zeta^2)^2}}}$$

$$\omega_c T_r = \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}\,\exp\left(\frac{\zeta \arccos \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Vi ser att $\omega_B \approx \omega_c$ och att $\omega_c \approx 1/T_r$.

Sammanfattande Tabell

	Snabbhet	Dämpning	Statisk noggrannhet
Stegsvar	Stigtid T_r	Översläng M Lösningstid T_s	Normaliserade slutfelet e_0
$\lvert T(i\omega)\rvert$	Bandbredd $\omega_B \sim 1/T_r$ Resonansfrekvens ω_r	Resonanstopp M_P	Felkoefficienten $e_0 = 1 - T(0)$
$G_o(i\omega)$	Skärfrekvens ω_c	Fasmarginal ϕ_m Amplitudmarginal A_m	Lågrekvens-asymptotens lutning och skärning
Poler	Avstånd till origo ω_0	Relativ dämpning ζ	

Repetitionsfrågor

1. Hur är fas- och amplitudmarginalerna definierade?
2. Hur är fas- och amplitudmarginalerna relaterade till insignalutsignalstabilitet?
3. Vad är skärfrekvensen?
4. Vad är relationen mellan ett stegsvars stigtid och bandbredden för slutna systemet samt skärfrekvensen för kretsförstärkningen?
5. Vad är relationen mellan ett stegsvars översläng och resonanstoppen för slutna systemet samt fasmarginalen för kretsförstärkningen?