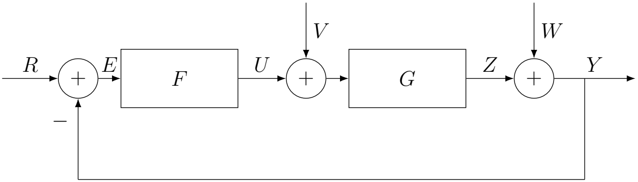
Reglerteknik, Föreläsning 11: Fundamentala Begränsningar

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Det Återkopplade Systemet



$$Y(s) = T(s)R(s) + G(s)S(s)V(s) + S(s)W(s) \tag{1}$$

$$Z(s) = T(s)R(s) + G(s)S(s)V(s) - T(s)W(s) \tag{2}$$

$$U(s) = F(s)S(s)R(s) - T(s)V(s) - F(s)S(s)W(s) \tag{3}$$

Vi vill reglera Z med mätningen Y där W är ett mätfel.

Reglerfelet är

$$E(s) = R(s) - Z(s) = S(s)R(s) - G(s)S(s)V(s) + T(s)W(s)$$

Övre Begränsning på Bandbredd

Litet $E(s)$ oberoende av $R(s)$ förutsätter

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

liten. Då är $F(s)G(s)$ stor och $1 + F(s)G(s) \approx F(s)G(s)$, och därför är enligt (3)

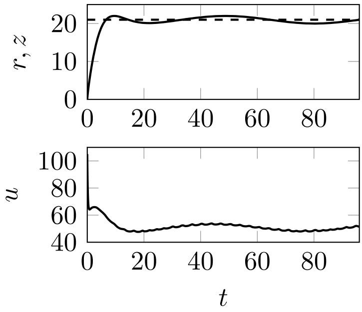
$$U(s) \approx \frac{1}{G(s)}R(s) - V(s) - \frac{1}{G(s)}W(s)$$

Av fysikaliska skäl är $G(s)$ oftast liten för stora s, och då blir $U(s)$ stor.

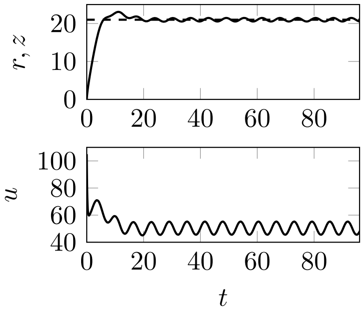
Från uttrycket för E att mätfel också kommer att synas i reglerfelet och multipliceras med den komplementära känslighetsfunktionen $T = 1 - S$.

Det finns en övre begränsning på bandbredden på det slutna systemet som beror på hur stora styrsignaler vi kan tolerera och på hur stora mätfel vi har och vad frekvensinnehållet är i mätfelen.

Husuppvärmning



(a) Mätfel $w(t) = \sin(0.1t)$.

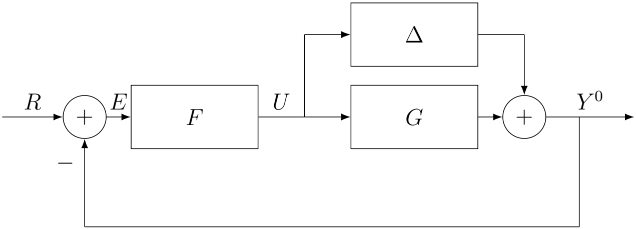


(b) Mätfel $w(t) = \sin(t)$.

Bandbredden är ungefär 0.3 rad/s. För $w(t) = \sin(0.1t)$ ses att regulatorn ser till att den felmätta signalen och inte den verkliga temperaturen regleras.

För $w(t) = \sin(t)$ ser vi att oscillationerna i den verkliga temperaturen har mindre amplitud men är mer högfrekvent.

Modellfel



Låt $G(s)$ vara *modell* av det *sanna* öppna systemet $G^0(s)$. Det *relativa modellfelet* ges av

$$\Delta(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} \tag{4}$$

Relativa Fel

Låt

$$
\begin{aligned}
Y^0(s) &= G^0(s)U(s), & Y(s) &= G(s)U(s) \\
S^0(s) &= \frac{1}{1+F(s)G^0(s)}, & S(s) &= \frac{1}{1+F(s)G(s)} \\
T^0(s) &= \frac{F(s)G^0(s)}{1+F(s)G^0(s)}, & S(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}
\end{aligned}
$$

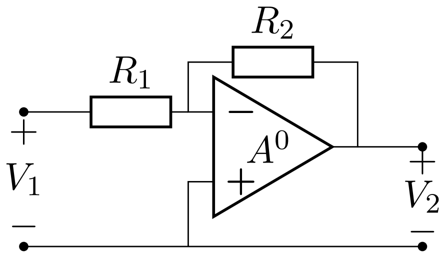
Då följer

$$
\frac{Y^0(s) - Y(s)}{Y(s)} = S^0(s)\Delta(s)
$$

$$
\frac{T^0(s) - T(s)}{T(s)} = S^0(s)\Delta(s)
$$

Man vill ha en bra modell för de s där man vill att relativa modellfelet i den komplementära känslighetsfunktionen ska vara litet och känslighetsfunktionen ska vara nära ett—typiskt för $s = i\omega$ nära önskad skärfrekevens.

Operationsförstärkare



Med $Y(s) = -V_2(s)$, $U(s) = V_g(s)$, $R(s) = R_2/R_1V_1(s)$, $G^0(s) = A^0(s)$ och $F(s) = R_1/(R_1 + R_2)$ kan vi tolka operationsförstärkaren som ett återkopplat system.

Slutna Systemets Känslighet

Känslighetsfunktionen ges av

$$S^0(s) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_1+R_2} A^0(s)}$$

och slutna systemets överföringsfunktion från V_1 till V_2 ges av

$$-T^0(s)\frac{R_2}{R_1} = -\left(1 - S^0(s)\right)\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{1}{A^0(s)} + \frac{R_1}{R_1+R_2}} \approx -\frac{R_2}{R_1}$$

om $A^0(s)$ är stor. Typiskt är $A^0(s)$ i storleksordningen 10^5 till 10^6 och i stort sett oberoende av s. Antag att vi väljer $R_2/R_1 = 100$. Då ser vi att

$$S(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+100} A(s)} \approx 10^{-3}$$

om $A^0(s) = 10^5$.

Stabilitet och Modellfel

Antag att vi för $\Delta(s) = 0$ valt $F(s)$ för ett givet $G(s)$ så att vi har stabilitet men så att vi för det sanna systemet med $\Delta(s) \neq 0$ för skärfrekvensen ω_c har att

$$F(i\omega_c)G(i\omega_c)\left(1 + \Delta(i\omega_c)\right) = -1$$

Detta innebär att nämnaren i komplementära känslighetsfunktionen är noll och vi ligger på stabilitetsgränsen.

Ekvationen ovan är ekvivalent med att

$$\Delta(i\omega_c) = -\frac{1}{T(i\omega_c)}$$

Det är nu rimligt att tro att om

$$|\Delta(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|}, \quad \forall\omega$$

så är även det slutna systemet med $\Delta(s) \neq 0$ stabilt.

Robusthetskriteriet

Resultat

Antag att G^0, G och Δ är relaterade som i (4) samt att F är vald sådan att

$$T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

är analytisk i höger halvplan. Antag vidare att G och G^0 har samma antal poler i höger halvplan, och att $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ är analytiska i höger halvplan förutom för ett ändligt antal poler, samt att båda går mot noll när $|s|$ går mot oändligheten i höger halvplan. Antag slutligen att

$$|\Delta(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|}, \quad \forall\omega$$

Då gäller att

$$T^0(s) = \frac{F(s)G^0(s)}{1 + F(s)G^0(s)}$$

är analytisk i höger halvplan.

Rationella Överföringsfunktioner

Kommentar

Vi minns att en rationell överföringsfunktion är analytisk i höger halvplan om och endast om alla poler ligger i det strikta vänstra halvplanet.

Poler i Höger Halvplan

Resultat

Bodes integral: Antag att G_o är analytisk i höger halvplan förutom ett ändligt antal poler $p_1, \ldots, p_m$. Antag också att det existerar positiva konstanter C, δ och R så att

$$|G_o(s)| \leq \frac{C}{|s|^{(1+\delta)}}$$

för $|s| \geq R$ i höger halvplan. Då gäller med $S(s) = 1/(1 + G_o(s))$ att

$$\int_0^\infty \ln |S(i\omega)| \, d\omega = \pi \sum_{k=1}^{m} p_k$$

om S är analytisk i höger halvplan.

Rationella Överföringsfunktioner

Kommentar

Antagandena i resultatet ovan är uppfyllda för rationella överföringsfunktioner G_o om är sådana att skillnaden i gradtal mellan nämnarpolynom och täljarpolynom är minst två.

- Det har alltså ingen betydelse hur vi väljer vår regulator F för vilket värde vi får på integralen om vi inte kan minska antalet poler för G_o i höger halvplan.
- Detta betyder att det är bra om vi kan använda en regulator utan poler i höger halvplan så att inte regulatorn i sig ökar värdet på interalen.
- Observera att vi med F inte kan reducera antalet poler i höger halvplan som G har genom förkortning, eftersom det gäller att förkortning av poler i höger halvplan i kretsförstärkningen gör att vi förlorar stabilitet.

Nollställen i Höger Halvplan

Från definitionerna av skärfrekvens och fasmarginal gäller

$$|G_o(i\omega_c)| = 1, \quad \arg G_o(i\omega_c) = -\pi + \varphi_m \tag{5}$$

där $G_o(s) = F(s)G(s)$ är kretsförstärkningen. Den andra ekvationen kan skrivas

$$\arg F(i\omega c) = -\arg G(i\omega_c) - \pi + \varphi_m$$

Detta betyder att ju mer negativ $\arg G(i\omega_c)$ är, ju mer positiv måste $\arg F(i\omega c)$ vara för att vi ska erhålla önskad fasmarginal. Oftast innebär detta att även $|F(i\omega_c)|$ är stor.

Vad kan orsaka stort negativt värde på $\arg G(i\omega_c)$?

Exempel

Betrakta

$$G(s) = \frac{s-a}{(s+a)(s+b)}$$

där $a > 0$ och $b > 0$. Vi har poler i $-a$ och $-b$ och ett nollställe i a. Det gäller att

$$|G(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + (-a)^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}\sqrt{\omega^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$$
$$\arg G(i\omega) = -\arctan\frac{\omega}{b} - 2\arctan\frac{\omega}{a}$$

För

$$H(s) = \frac{1}{s+b}$$

gäller att

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}, \quad \arg H(i\omega) = -\arctan\frac{\omega}{b}$$

Vi ser att dessa överföringsfunktioner har samma beloppsfunktion men olika fasfunktion. Överföringsfunktionen G har större fas till beloppet.

Minimumfas och Ickeminimumfas

Definition

En system med överföringsfunktion $G(s)$ säges vara *minimumfas* om både $G(s)$ och $G(s)^{-1}$ har alla poler i det strikta vänstra halvplanet och bägge överföringsfunktionerna definierar kausala system. En system som inte är minimumfas säges fara *ickeminimumfas*.

I exemplet definierar G ett system som är ickeminimumfas medan H definierar ett system som är minimumfas.

Ett ytterligare exempel på ett system som inte är minimumfas definieras av

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+b}$$

där $b > 0$. Vi ser att dess invers inte definierar ett kausalt system. Vidare har vi att

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}, \quad \arg G(i\omega) = -\arctan\frac{\omega}{b} - \omega$$

Bodes Relationer

Resultat

Betrakta en överföringsfunktion G som är analytisk och begränsad i höger halvplan och för vilken $|\arg G(s)|/|s|$ går mot noll då $|s|$ går mot oändligheten i höger halvplan. Antag vidare att G inte har några nollställen på imaginära axeln samt att $G(0) > 0$. Låt $A(\omega) = \log|G(i\omega)|$ och $\phi(\omega) = \arg G(i\omega)$. Då gäller att

$$\phi(\omega) \leq \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{A(\bar{\omega}) - A(\omega)}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}$$

för all $\omega \geq 0$. Likhet gäller ovan om G har alla nollställen strikt i vänster halvplan.

Kommentar

Antagandena i första meningen är uppfyllda för rationella och propra G med alla poler strikt i vänster halvplan.

Tillämpning på Kretsförstärkning

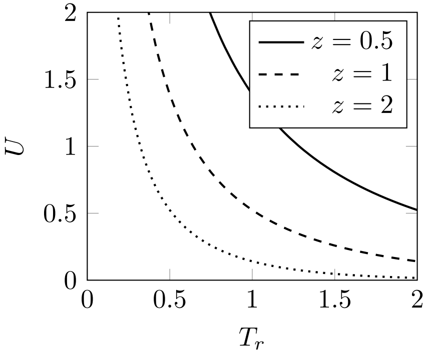
Bodes relationer säger approximativt att

$$\phi(\omega) \lessapprox \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega}$$

Låt oss nu tillämpa resultatet på kretsförstärkningen $G_o(s) = F(s)G(s)$, där F är regulatorns överföringsfunktion och G är öppna systemets överföringsfunktion. Högerledet i olikheten anger då lutningen i Bodediagrammet för beloppskurvan i en loglogskala. Om lutningen är minus ett så kommer fasen att vara mindre än $-\pi/2$. Om systemet inte är minimumfas så kommer olikheten att vara strikt och det blir svårt att erhålla god fasmarginal oavsett vilken regulator vi använder.

Observera att vi inte kan förkorta bort nollställen i höger halvplan för öppna systemets överföringsfunktion med poler i höger halvplan för regulatorns överföringsfunktion, eftersom detta skulle resultera i ett instabilt slutet system.

Stigtid och Underslång för Ickeminimumfassystem



För stigtid T_r upfyller stegsvaret y

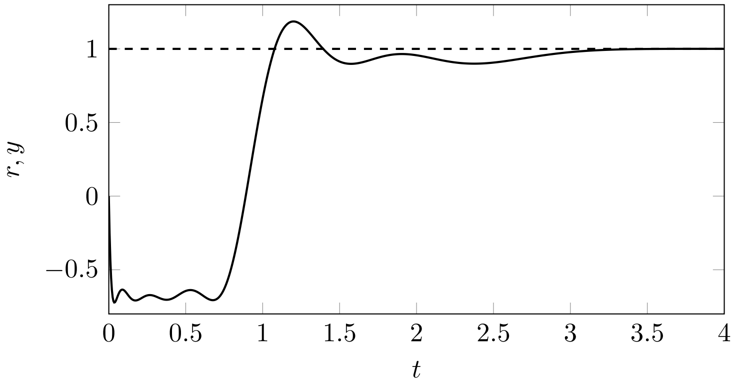
$$y(t) \geq 0.9, \quad t \geq T_r$$

Med underslång begränsad av U gäller

$$y(t) \geq -U, \quad 0 \leq t \leq T_r$$

där $U > 0$. (Här förutsätter vi att referensvärdet är ett och att stegsvarets slutfel är noll.)

Exempel för $z = 1$



Här klarar vi $T_r = 1$ och $U = 0.7$ som är nära gränsen för vad som kan åstadkommas.

Repetitionsfrågor

1. Vad sätter begränsningar på vilken bandbredd som kan åstadkommas för ett slutet system?
2. Hur är det relativa felet för den komplementära känslighetsfunktionen relaterat till det relativa modellfelet för öppna systemet?
3. Vad säger robusthetskriteriet?
4. Hur lyder Bodes integral?
5. Vad gäller för ett system som är minimumfas?
6. Vad säger Bodes relationer och vad har de för konsekvens för fasen?
7. Vilka begränsningar medför nollställen i höger halvplan på stigtid och undersläng för ett stegsvar?