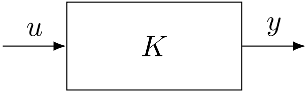
Reglerteknik, Föreläsning 2: Dynamiska System

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Statiskt System



Statiskt system

$$y(t) = f\left(u(t)\right)$$

där $u(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal.

Linjärt statiskt system

$$f(x) = Kx$$

där K kallas proportionalitetskonstant.

För statiska system beror utsignalen endast av vad insignalen är vid samma tidpunkt.

Dynamiskt System

Dynamiskt system

$$y = \mathcal{F}(u)$$

där $\mathcal{F}$ är en operator som avbildar insignalfunktionen u på utsignalfunktionen y.

Exempel: PI-regulatorn

$$u = \mathcal{F}(e) \Leftrightarrow u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

där e insignalfunktion och u utsignalfunktion.

Exempel: derivataoperatorn

$$y = \mathcal{F}(u) \Leftrightarrow y(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1}$$

som avbildar funktionen $u(t)$ på sin derivata.

Kausalitet

Definition

En operator $y = \mathcal{F}(u)$ är kausal om $y(t)$ endast beror på $u(\tau)$ för $\tau \leq t$.

Exempel: faltning

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

där g kallas *viktsfunktionen*. Eftersom $y(t) = g(t)$ för $u = \delta(t)$, där $\delta(t)$ är impulsfunktionen, så kallas g även för systemets *impulssvar*.

Vad är viktsfunktionen för PI-regulatorn?

Linjäritet

Definition

En operator $y = \mathcal{F}(u)$ är linjär om $\mathcal{F}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\mathcal{F}(u_1) + \beta\mathcal{F}(u_2)$ för alla funktioner u_1, u_2 och alla reella tal α, β.

Sats

Operatorn beskriven av faltningen (2) är linjär och kausal.

Kommentar

Vi kaller ett system som definieras av en linjär operator för ett *linjärt system*.

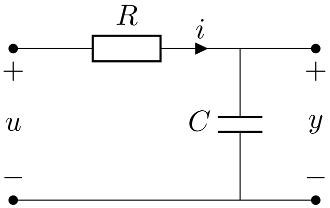
Linjära Differentialekvationer

Linjära differentialekvationer beskriver linjära kausala system.

Ett exempel är differentialekvationen för husuppvärmningsexemplet i förra föreläsningen

$$C\frac{dy(t)}{dt} + (h+k)y(t) = ku(t) + hv(t)$$

Elektrisk Krets



$$u(t) - y(t) = Ri(t)$$
$$C\frac{dy(t)}{dt} = i(t)$$

eller ekvivalent

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t)$$

där $a = b = 1/RC$.

Lösning av Differentialekvationen

$$
\begin{aligned}
e^{at}\frac{dy(t)}{dt} + e^{at}ay(t) &= e^{at}bu(t) \\
\frac{d}{dt}\left(e^{at}y(t)\right) &= e^{at}bu(t) \\
e^{at}y(t) - e^{at_0}y(t_0) &= \int_{t_0}^{t} e^{as}bu(s)ds \\
y(t) &= e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(s-t)}bu(s)ds
\end{aligned}
$$

Byt integrationsvariabel till $\tau = t - s$:

$$
y(t) = e^{-a(t-t_0)}y(t_0) + \int_{0}^{t-t_0} e^{-a\tau}bu(t-\tau)d\tau
$$

Om $t_0 = 0$ och $y(t_0) = 0$ så med $g(\tau) = e^{-a\tau}b$

$$
y(t) = \int_{0}^{t} g(\tau)u(t-\tau)d\tau
$$

P-reglering av Statiskt System

Systemet

$$y = \alpha u$$

regleras med P-regulatorn

$$u = K_P(r - y)$$

Slutna systemet blir

$$y = \frac{\alpha K_P}{1 + \alpha K_P} r \to r, \quad K_P \to \infty$$

där såväl u som y och r är funktioner av tiden t.

Alltså bättre och bättre prestanda ju större K_P är.

Dynamiskt System

Betrakta

$$\dot{y}(t) + y(t) = \alpha\left(-\dot{u}(t) + u(t)\right)$$

och låt $u(t)$ vara ett *steg* med *amplitud* u_0, d.v.s.

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Om $y(0) = 0$ så kan man visa att

$$y(t) = \alpha(1 - 2e^{-t})u_0 \to \alpha u_0, \quad t \to \infty \tag{3}$$

Alltså beter sig detta dynamiska system likadant som det statiska systemet då tiden gått mot oändligheten.

P-reglering av Dynamiskt System

Systemet

$$\dot{y}(t) + y(t) = \alpha\left(-\dot{u}(t) + u(t)\right)$$

regleras med P-regulatorn

$$u = K_P(r - y)$$

Slutna systemet blir

$$\dot{y}(t) + y(t) = \alpha\left(-K_P(\dot{r}(t) - \dot{y}(t)) + K_P(r(t) - y(t))\right)$$

som kan förenklas till

$$\dot{y}(t) + \gamma y(t) = \beta(r(t) - \dot{r}(t)) \tag{4}$$

där

$$\gamma = \frac{1 + \alpha K_P}{1 - \alpha K_P}, \quad \beta = \frac{\alpha K_P}{1 - \alpha K_P}$$

Stabilitet

För r steg med amplitud r_0 blir lösningen

$$y(t) = \beta \left(\frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) - e^{-\gamma t} \right) r_0 \tag{5}$$

Om $\gamma > 0$ så gäller att $y(t) \to \beta r_0/\gamma = \alpha K_P r_0/(1 + \alpha K_P)$, då $t \to \infty$, vilket är samma värde som vi har för det statiska systemet.

Om $\gamma < 0$ så gäller att $y(t) \to \infty$, då $t \to \infty$. Villkoret $\gamma < 0$ är ekvivalent med att $K_P > 1/\alpha$.

Vi säger att det slutna systemet är *instabilt* då $y(t)$ inte konvergerar mot ett konstant ändligt värde då referensvärdet är konstant och ändligt.

Insignalutisngalstabilitet

Definition

Ett system säges vara *insignalutsignalstabilt* om begränsad insignal medför att utsignalen är begränsad.

Betrakta

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{6}$$

med en godtycklig viktsfunktion $g(\tau)$, inte nödvändigtvis relaterad till en linjär differentialekvation.

Sats

Ett system beskrivet av faltningen (6) är insignalutsignalstabilt om och endast om impulssvaret är *absolut integrerbart*, d.v.s.

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty$$

Kommentar

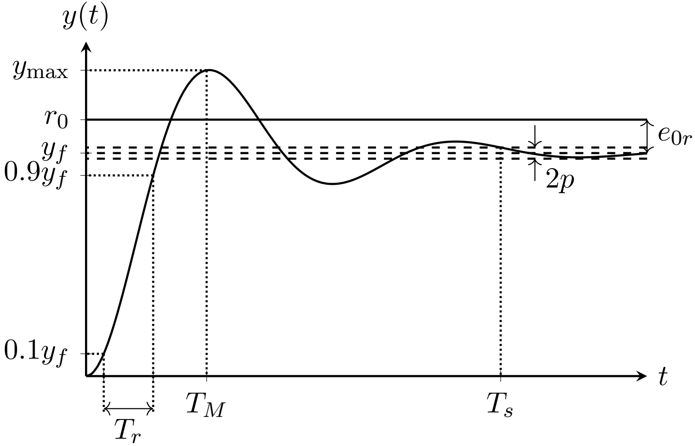
Stegsvaret (5) har en derivata som ges av

$$\dot{y}(t) = \frac{2\beta e^{-\gamma t}}{1 - \alpha K_P}$$

då $r_0 = 1$. Detta impulssvar är absolut integrerbart om och endast om $\gamma > 0$, och därför är det slutna systemet insignalutsignalstabilt om och endast om $\gamma > 0$.

Detta stämmer överens med vad vi tidigare sett för ett steg, men nu känner vi också till vad som händer för alla begränsade signaler $r(t)$.

Stegsvar



där börvärdet $r(t)$ är ett steg givet av

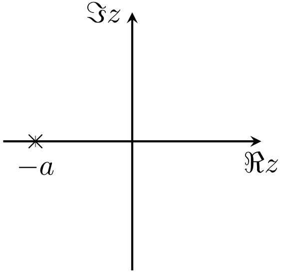
$$r(t) = \begin{cases} r_0, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Specifikationer på Stegsvar

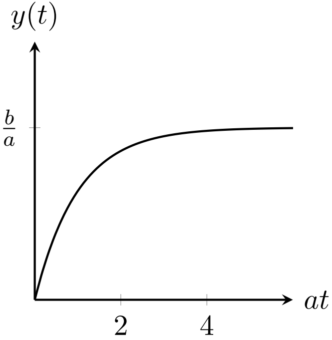
Idealt vill vi att reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ ska vara noll för alla tidpunkter, men oftast har vi istället specifikationer på

- *Stigtiden* T_r är tiden det tar för $y(t)$ att växa från 10% till 90% av sitt *slutvärde* y_f.
- *Insvängningstiden* T_s eller *lösningstiden* är minsta T_s sådan att $y_f - p \leq y(t) \leq y_f + p$ för alla $t \geq T_s$. Värdet på p anges istället ibland i procent av y_f och typiska värden är 2% eller 5%.
- *Slutfelet* e_{0r} är skillnaden mellan r_0 och y_f. Man definierar även det normaliserade slutfelet som $e_0 = e_{0r}/r_0$, vilket ska visa sig vara detsamma som den s.k. nollte felkoefficienten.
- *Överslängen* M definieras som $M = (y_{\max} - y_f)/y_f$, där $y_{\max}$ är det största värdet för y. Ofta anges M i procent.

Första Ordningens Linjär Differentialekvation



(a) Rot till karakteristisk ekvation.



(b) Stegsvar.

Lösningen till

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t)$$

när u är ett steg med amplitud ett, ett s.k *enhetssteg*, ges av

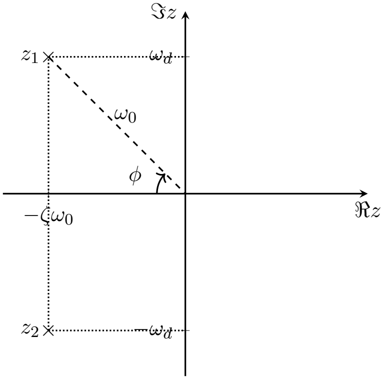
Första Ordningens Linjär Differentialekvation

$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

när $y(0) = 0$.

- Stigtiden ges av $aT_r = 2.2$
- Insvängningstiden (5%) ges av $aT_s = 3$
- Överslängen är $M = 0$

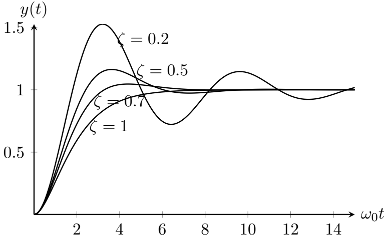
Andra Ordningens Linjär Differentialekvation (komplexa rötter)



$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t) \tag{7}$$

där $0 \leq \zeta < 1$ och $\omega_0 > 0$. ζ kallas för den *relativa dämpningen*.
Karakteristiska ekvationen har rötter $z_{1,2} = (-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_0$
I figuren ges ϕ av att $\cos\phi = \zeta$ och $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0$.

Andra Ordningens Linjär Differentialekvation (komplexa rötter)



För u enhetssteg fås

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin\left(\omega_d t + \phi\right)$$

då $0 \leq \zeta < 1$. Då $\zeta = 1$ ges lösningen istället av

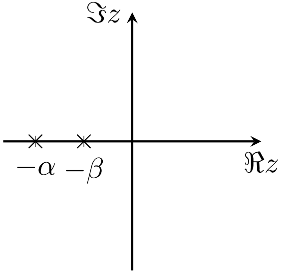
$$y(t) = 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

Överslängen är $M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$, stigtiden är $T_r = \omega_0^{-1} e^{\phi/\tan\phi}$ och insvängningstiden (5%) är $T_s \approx 3/(\omega_0 \zeta)$ då $0 \leq \zeta < 0.9$.

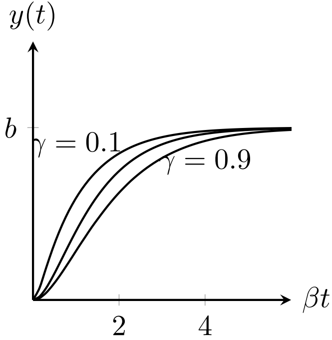
Kommentar

- Aståndet från origo till rötterna är omvänt proportionellt mot insvängningstiden och stigtiden.
- Överslängen är större ju mindre den relativa dämpningen är.

Andra Ordningens Linjär Differentialekvation (reella rötter)



(a) Rötter till karakteristisk ekvation.



(b) Stegsvar.

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t)$$

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$z^2 + a_1 z + a_2 = (z+\alpha)(z+\beta) = 0$$

där (α, β) löser ekvationerna $\alpha + \beta = a_1$ och $\alpha\beta = a_2$.

Andra Ordningens Linjär Differentialekvation (reella rötter)

Stegsvaret ges av

$$y(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t}\right) b$$

Stegsvaren är plottade för olika värden på $\gamma = \beta/\alpha$ som funktion av βt.

För små värden på γ ser stegsvaret nästan likadant ut som stegsvaret för

$$\dot{y}(t) + \beta y(t) = \beta b u(t)$$

Det är alltså den rot till den karakteristiska ekvationen som ligger närmast den imaginära axeln som i huvudsak bestämmer hur stegsvaret ser ut. Denna rot beskriver den så kallat *dominerande dynamiken*.

Insikt

Man kan istället för att ange specifikationer på stegsvar ange specifikationer på karakteristiska ekvationens rötter.

Repetitionsfrågor

1. Vad är kriteriet för att ett system är linjärt?
2. Vad är kriteriet för att ett system är kausalt?
3. Ge exempel på linjära dynamiska och kausala system.
4. Hur relaterar viktsfunktionen insignalen och utsignalen för ett linjärt dynamiskt system?
5. Vad är definitionen av att vara insignalutsignalstabil?
6. Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på viktsfunktionen för att ett linjärt dynamiskt system ska vara insignalutsignalstabilt.
7. Berätta vilka specifikationer man brukar ange för ett stegsvar.
8. Hur beror stegsvarets insvängningstid och översläng på karakteristiska ekvationens rötter för en andra ordningens linjär differentialekvation?