Reglerteknik, Föreläsning 3: Överföringsfunktionen

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Laplacetransformen

Den enkelsidiga Laplacetransformen eller förkortat $\mathcal{L}$-transformen $\mathcal{L}f$ av en funktion f av tiden t, som antas vara noll för negativa tider, definieras om integralen existerar enligt:

Definition

$\mathcal{L}$-transform:

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad \Re s > s_0$$

Här gäller att s är ett komplext tal och s_0 definierar *konvergensområdet* för integralen.

Analytisk Funktion

Sats

Det gäller att $\mathcal{L}$-transformen F i Definition 1 är en *analytisk funktion*[a] för $\Re s > s_0$.

[a] Med analytisk menar vi att funktionen kan skrivas som en konvergent potensserie, vilket för komplexa funktioner är ekvivalent med att den är komplext differentierbar.

Kommentar

Vi kan utvidga definitionsområdet för F till alla de s i komplexa talplanet för vilka F är analytisk. Detta kallas *analytisk fortsättning*. De värden på s för vilka F inte kan definieras kallas för *singulariteter*.

Konvention

Vi inför konventionen att om en liten bokstav betecknar en tidsfunktion, så betecknar motsvarande stora bokstav dess $\mathcal{L}$-transform. Om vi vill vara speciellt tydliga så kan vi även skriva $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$.

Exempel

Låt $f(t) = 1$, d.v.s. ett enhetssteg. Då gäller att $\mathcal{L}$-transformen ges av

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

om $\Re s > 0$. Konvergensområdet är alltså det öppna högra komplexa halvplanet. Funktionen F definierad via analytisk fortsättning är analytisk för alla $s \neq 0$. Den har en singularitet för $s = 0$.

Tabell med Transformpar

Observera att det alltid gäller att $f(t) = 0$ för $t < 0$.

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(c-b)e^{-bt}-(c-a)e^{-at}}{a-b}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{s+c}{(s+a)^2}$	$(1+(c-a)t)\,e^{-at}$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\cos(at)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{b}\sin(bt)e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$	$\frac{s+c}{(s+a)^2+b^2}$	$\left(\cos(bt)+\frac{c-a}{b}\sin(bt)\right)e^{-at}$

Inversformel

Givet ett transformpar f och F gäller att

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{\sigma t} \cos\left(\omega t + \beta(\omega)\right) |F(\sigma + i\omega)| d\omega$$

där

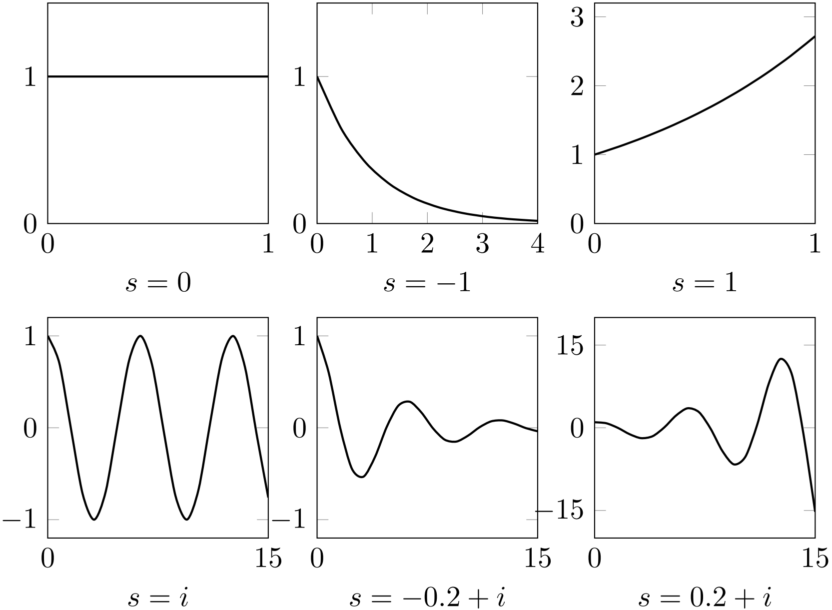
$$\beta(\omega) = \arg F(\sigma + i\omega)$$

och där F analytisk för $\Re s > \sigma$.

Generalisering av att en periodisk funktion kan skrivas som en oändlig summa av av trigonometriska funktioner.

Då $\sigma = 0$ gäller att inversformeln sammanfaller med formeln för den inversa Fouriertransformen.

$e^{\sigma t} \cos \omega t$



Allmänna samband för $\mathcal{L}$-transformen

Linjäritet	$af(t) + bg(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$aF(s) + bG(s)$
Faltning	$\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$G(s)U(s)$
Tidsförskjutning	$f(t-\tau)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$e^{-\tau s}F(s)$
Dämpning	$e^{-at}f(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$F(s+a)$
Derivering	$f'(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$sF(s) - f(0)$
Integrering	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{s}F(s)$
Monommultiplikation	$tf(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$-F'(s)$
Skalning	$f(at)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{a}F(s/a)$
Slutvärde	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$=$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Begynnelsevärde	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$=$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$

Slutvärdes- och begynnelsevärdesresultaten förutsätter att gränsvärdena existerar.

$\mathcal{L}$-transform för ramp

Exempel

En ramp

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0, & -\infty \le t \le 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$$

är integralen av ett enhetssteg. Från förra exemplet vet vi att enhetssteget har $\mathcal{L}$-transform $1/s$ och alltså är rampens $\mathcal{L}$-transform $1/s^2$.

Laplacetransform av Distributioner

För distributioner definierar vi dess $\mathcal{L}$-transform genom att låta distributionen beskrivas via derivering av en funktion som är kontinuerlig.

För deltafunktionen har vi att $\delta = \mathcal{D}^2 h$, där h är en ramp. Då definierar vi

$$\mathcal{L}\delta = s^2 H(s)$$

där $H(s) = \mathcal{L}h = 1/s^2$ enligt förra exemplet. Detta gör att vi har överensstämmelse med resultatet för $\mathcal{L}$-transformen av derivator för klassiska funktioner och att

$$\mathcal{L}\delta = 1$$

Mer generellt gäller att $\mathcal{L}(\mathcal{D})^n\delta = s^n$.

Överföringsfunktion

Definition

$\mathcal{L}$-transformen $G(s)$ av viktsfunktionen $g(\tau)$ kallas för systemets *överföringsfunktion*.

Överföringsfunktion för RC-krets

I förra föreläsningen visade vi att viktsfunktionen är $g(\tau) = e^{-a\tau}b$, där $a = b = 1/(RC)$, som har $\mathcal{L}$-transformen (jfr. tabell)

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

och som därför är systemets överföringsfunktionen.

Beräkan utsignal med hjälp av $\mathcal{L}$-transformen

Antag att $u(t) = \sin(\omega t)$. Då gäller att

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

och om u är insignalen till RC-kretsen så är $Y(s) = G(s)U(s)$, d.v.s.

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

med $T = 1/a = RC$.

Partialbråksuppdelning

Ansätt

$$\frac{1}{Ts+1}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\alpha}{Ts+1}+\frac{\beta s+\gamma}{s^2+\omega^2} = \frac{\alpha(s^2+\omega^2)+(\beta s+\gamma)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)}$$

Genom att identifiera koefficienterna för de olika potenserna av s i täljaren och sätta dem lika erhålles följande ekvationssystem för (α, β, γ):

$$\begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ \omega^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

med lösning

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} \begin{bmatrix} \omega T^2 \\ -\omega T \\ \omega \end{bmatrix}$$

Använd Tabellen Baklänges

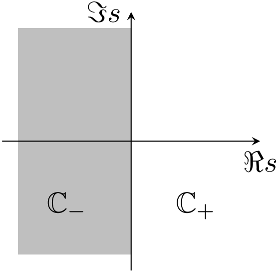
$$y(t) = \frac{\alpha}{T}e^{-t/T} + \beta\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t$$

Från formeln $\sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t = \sin(\omega t + \phi)$ erhåller vi genom att låta $\sin\phi = \beta/\sqrt{\beta^2 + \gamma^2/\omega^2}$ och $\cos\phi = (\gamma/\omega)/\sqrt{\beta^2 + \gamma^2/\omega^2}$ att

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\alpha}{T}e^{-t/(T)} \\ &\quad + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2/\omega^2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2/\omega^2}}\cos\omega t + \frac{\gamma/\omega}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2/\omega^2}}\sin\omega t\right) \\ &= \frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}e^{-t/(T)} + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin\left(\omega t + \phi\right) \end{aligned}$$

där $\tan\phi = \beta\omega/\gamma = -\omega T$. Vi ser att den första termen i lösningen konvergerar mot noll när $t \to \infty$ och att den andra termen är en sinusfunktion med samma frekvens som u men med en annan amplitud och annan fas ϕ.

Vänster och Höger Halvplan



Definition

Den delmängd av komplexa talplanet som ligger till vänster om den imaginära axeln, d.v.s.

$$\mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re s < 0\}$$

kallar vi *strikta vänstra halvplanet*. Komplementet till detta område, d.v.s. $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-$ kallar vi det *högra halvplanet*.

Poler och Nollställen

Definition

För rationella F gäller att de s för vilka $F(s) = 0$ kallas för *nollställen* till F. På samma sätt säger vi för rationella F att de s för vilka $1/F(s) = 0$ kallas för *poler* till F.

Exempel

Funktionen

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

har ett nollställe i -1 och poler i -2 och -3, och funktionen

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s+i)(s-i)}$$

har inga nollställen, men poler i $\pm i$.

Multiplicitet

Definition

Om det för ett rationellt F gäller att vi kan skriva $F(s) = (s - s_0)^n \bar{F}(s)$ med $\bar{F}(s_0) \neq 0$, där $n \geq 1$ så kallas s_0 ett nollställe med *multiplicitet* n. På samma sätt gäller att om vi kan skriva $F(s) = \bar{F}(s) / (s - s_0)^n$ med $1/\bar{F}(s_0) \neq 0$, där $n \geq 1$ så kallas s_0 en pol med *multiplicitet* n. Då $n = 1$ säger vi att nollställen respektive poler är *enkla*, och då $n = 2$ att de är *dubbla*.

Multiplicitet

Exempel

Funktionen

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$$

har en dubbelpol i 1 och en enkelpol i -2. Funktionen

$$F(s) = \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{s^3+2s+1}$$

har ett enkelt nollställe i -1 eftersom den kan skrivas
$F(s) = (s+1)\bar{F}(s)$ där $\bar{F}(-1) = -1/2$.

Pol- och Nollställespolynom

För en rationell överföringsfunktion G kan vi alltid skriva

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{1}$$

där A och B är polynom i s.

Definition

Ett polynom $A(s)$ som via $A(s) = 0$ definierar en överföringsfunktions poler kallas *polpolynom*, och ett polynom $B(s)$ som via $B(s) = 0$ definierar en överföringsfunktions nollställen kallas *nollställespolynom*.

Kommentar

Vi noterar att A och B i (1) inte får ha några gemensamma faktorer som är polynom i s om A och B ska definiera polerna och nollställena. Detta betyder att vi valt att skriva G så att eventuella singulariteter som kan förkortas tagits bort.

Förkortningar

Exempel

Betrakta funktionen

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Den har ett polpolynom $A(s) = s + 2$ och ett nollställespolynom $B(s) = 1$. Det gäller att F har en pol då $A(s) = 0$ och ett nollställe då $B(s) = 0$. Från detta inser vi att -2 är en pol och att det inte finns några nollställen, eftersom $B(s) = 0$ saknar lösning. Det gäller dock att F har singulariteter i såväl -1 som -2, men den förra är ingen pol, eftersom den kan förkortas bort.

Properhet

Definition

En rationell funktion säges vara *proper* om gradtalet för nollställespolynomet inte är högre än gradtalet för polpolynomet. Om gradtalet för nollställespolynomet är strikt lägre än gradtalet för polpolynomet så säges funktionen vara *strikt proper*. En rationell funktion som inte är proper säges vara *ickeproper*.

Properhet

Exempel

Funktionen

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

är strikt proper medan funktionen

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

endast är proper. Funktionen

$$F(s) = s + 1$$

är ickeproper.

Stabilitet

Sats

Ett system med en rationell överföringsfunktion G är insignalutsignalstabilt om och endast om överföringsfunktionen är proper och alla dess poler ligger i det strikta vänstra halvplanet $\mathbb{C}_-$.

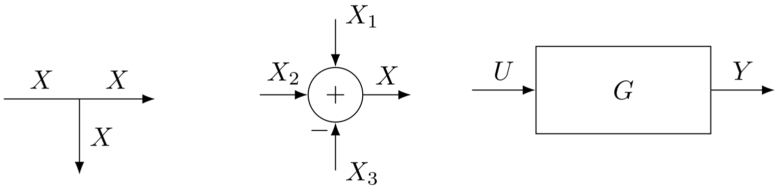
Exempel

Ett system med överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

har poler i -1 och -2, och är därför insignalutsignalstabilt enligt Sats 2.

Byggblock för Blockschema



(a) Förgrening (b) Summering (c) Överföringsfunktion

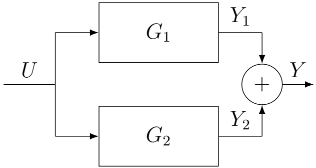
Summering:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) - X_3(s)$$

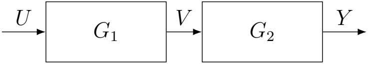
Överföringsfunktion:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Parallell- och Seriekoppling



(a) Parallellkoppling.

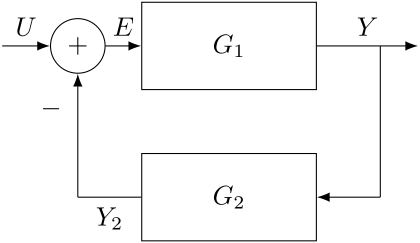


(b) Seriekoppling

Parallellkoppling: Ekvationerna är $Y_1 = G_1U$, $Y_2 = G_2U$ samt $Y = Y_1 + Y_2$, vilket resulterar i att $Y = (G_1 + G_2)U$, och överföringsfunktionen från U till Y given av $G = G_1 + G_2$.

Seriekoppling: Ekvationerna är $V = G_1U$, $Y = G_2V$, vilket resulterar i att $Y = G_2G_1U$, och överföringsfunktionen från U till Y given av $G = G_1G_2$.

Återkoppling



Ekvationerna är $E = U - Y_2$, $Y = G_1 E$ och $Y_2 = G_2 Y$, vilket ger

$$Y = G_1(U - G_2 Y)$$

ur vilket man kan lösa ut

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} U$$

och överföringsfunktionen från U till Y ges av
$G = G_1/(1 + G_1 G_2)$. Vi noterar att om G_1 och G_2 är rationella så är även G rationell.

Lösning av Differentialekvationer

I förra föreläsningen såg vi att

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$$

om $y(0) = 0$ så ges lösningen av faltningen

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

med viktsfunktionen $g(\tau) = e^{-a\tau}b$.

Allmänt kan lösningen till högre ordningens differentialekvationer

$$\begin{aligned}\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_{m-1}\frac{du(t)}{dt} + b_m u(t) \qquad (2)\end{aligned}$$

också skrivas som en faltning men med ett annat $g(\tau)$.

Laplacetransformering av Differentialekvationen

Från linjäritet och resultat om $\mathcal{L}$-transform av derivata följer

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n\right) Y(s) = (b_0 s^m + \ldots + b_{m-1} s + b_m)\, U(s)$$

om u och y och dess derivator har värdet noll vid tidpunkten noll.

Med

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n, \quad B(s) = b_0 s^m + \ldots + b_{m-1} s + b_m \tag{3}$$

följer från Sats 2 och Definition 2 att systemets överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Vi kan därför erhålla viktsfunktionen genom att ta den inversa $\mathcal{L}$-transformen av det rationella uttrycket ovan.

Poler och Nollställen

Om $A(s)$ och $B(s)$ inte har några gemensamma faktorer så ges enligt Definition 4 systemets nollställen av nollställena till $B(s)$ och systemets poler av nollställena till $A(s)$.

Observera att polerna är de samma som rötterna till den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen.

Stabilitet

Insignalutsignalstabilitet är ekvivalent med att överföringsfunktionen har alla poler i det strikta vänstra halvplanet $\mathbb{C}_-$, och därför är det intressant att avgöra om ett polynom $A(s)$ har alla sina nollställen i $\mathbb{C}_-$ eller ej.

Sats

För polynomet $A(s)$ i (3) gäller att $a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ är ett nödvändigt villkor för att alla nollställen till $A(s)$ ska ligga i $\mathbb{C}_-$.

Kommentar

För $n = 2$ är villkoret även tillräckligt.

Omvändingen av satsen gäller inte, vilket följande exempel visar.

Exempel

Polynomet $A(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 40$ har nollställena $s = -4$ och $s = 1 \pm 3i$.

Repetitionsfrågor

1. Hur definieras $\mathcal{L}$-transformen?
2. Vad är $\mathcal{L}$-transformen av derivatan av en signal?
3. Vad är $\mathcal{L}$-transformen av integralen av en signal?
4. Vad säger slutvärdessatsen?
5. Vad motsvaras faltning i tidsdomänen av i $\mathcal{L}$-domänen?
6. Vad är definitionen av ett systems överföringsfunktion?
7. Vad måste gälla för polerna för en överföringsfunktion för att systemet ska vara insignalutsignalstabilt?
8. Hur definieras pol- och nollställespolynomen?
9. Vad är överföringsfunktionen för en linjär differentialekvation?
10. Ange ett nödvändigt villkor på koefficienterna för ett polynom för att alla dess nollställen ska ligga i det strikta vänstra halvplanet.