Reglerteknik, Föreläsning 5: Regulatorstrukturer och Digital Implementering

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

P-reglering

Ett system (öppet systemet) givet av (jfr. Föreläsning 4)

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + s + 1} U(s) \tag{1}$$

regleras med P-regulatorn

$$U(s) = K_P(R(s) - Y(s)) \tag{2}$$

Det slutna systemet beskrivs då av

$$Y(s) = \frac{b_0 K_P}{s^2 + s + 1 + b_0 K_P} R(s)$$

Vi kan inte välja polerna för slutna systemet godtyckligt med hjälp av enbart K_P.

PD-reglering

PD-regulator

$$U(s) = (K_P + K_D s)\,(R(s) - Y(s))$$

ger slutet system

$$Y(s) = \frac{b_0(K_P + K_D s)}{s^2 + (1 + b_0 K_D)s + 1 + b_0 K_p} R(s)$$

Om vi nu väljer regulatorns parametrar K_P och K_D så att polpolynomet blir

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

för godtyckliga val av ω_0 och ζ så kan vi alltså med en PD-regulator placera polerna godtyckligt. Detta erhåller vi genom att ställa upp en ekvation för varje potens av s i polpolynomet, d.v.s.

$$1 + b_0 K_D = 2\zeta\omega_0$$
$$1 + b_0 K_P = \omega_0^2$$

som har lösningarna $K_P = (\omega_0^2 - 1)/b_0$ och $K_D = (2\zeta\omega_0 - 1)/b_0$.

Statisk förstärkning

Om referensvärdet är ett enhetssteg

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

så gäller enligt slutvärdessatsen att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{b_0(K_P + K_D s)}{s^2 + (1 + b_0K_D)s + 1 + b_0K_p}\frac{1}{s}$$

om gränvärdena existerar.

Om vi väljer K_P och K_D så att slutna systemets poler ligger i det strikta vänstra halvplanet, så följer från Kommentar 5.3 att $y(t)$ konvergerar mot $b_0K_P/(1 + b_0K_P)$, som kallas slutna systemets *statiska förstärkning*.

Alltså konvergerar reglerfelet mot $1/(1 + b_0K_P)$.

PID-reglering

PID-regulator

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)(R(s) - Y(s))$$

ger slutet system

$$Y(s) = \frac{b_0\left(K_P s + K_I + K_D s^2\right)}{s^3 + (1 + b_0 K_D)s^2 + (1 + b_0 K_p)s + b_0 K_I} R(s)$$

Välj K_P, K_I och K_D så att polpolynomet blir

$$(s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$$

vilket erhålles om

$$\begin{aligned} 1 + b_0 K_D &= (2\zeta + \alpha)\omega_0 \\ 1 + b_0 K_P &= (1 + 2\alpha)\omega_0^2 \\ b_0 K_I &= \alpha\omega_0^3 \end{aligned}$$

som är linjära ekvationer i variablerna K_P, K_I och K_D, och som därför är enkla att lösa.

Statisk förstärkning

Om referensvärdet är ett enhetssteg

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

så gäller enligt slutvärdessatsen att

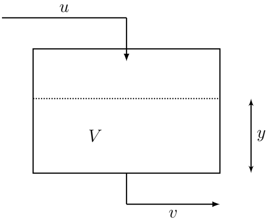
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \frac{b_0\left(K_P s + K_I + K_D s^2\right)}{s^3 + (1+b_0K_D)s^2 + (1+b_0K_p)s + b_0K_I}\frac{1}{s}\end{aligned}$$

om gränvärdena existerar.

Om vi väljer K_P, K_I och K_D så att slutna systemets poler ligger i det strikta vänstra halvplanet, så följer från Kommentar 5.3 att $y(t)$ konvergerar mot 1.

Alltså konvergerar reglerfelet mot 0.

Tankmodell



Antag att tankens tvärsnittarea A är konstant oberoende av höjden h. Då gäller $V = Ay$ och

$$A\frac{dy(t)}{dt} = u(t) - v(t)$$

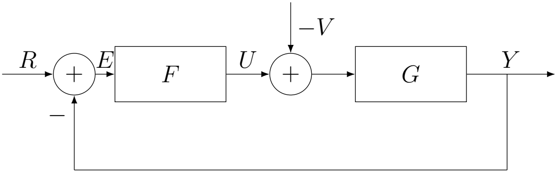
Med $k_p = 1/A$ fås

$$Y(s) = \frac{k_p}{s}(U(s) - V(s))$$

och vi ser att modellen av tanken har överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{k_p}{s}$$

Slutna systemet



Slutna systemet ges av

$$Y(s) = T(s)R(s) - G(s)S(s)V(s) \tag{3}$$

där S är känslighetsfunktionen och T är den komplementära känslighetsfunktionen.

PI-reglering

Med PI-regulatorn

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

fås

$$T(s) = \frac{K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)\frac{Kk_p}{s}}{1 + K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)\frac{k_p}{s}} = \frac{Kk_p(s + 1/T_I)}{s^2 + Kk_p s + Kk_p/T_I}$$

$$G(s)S(s) = \frac{k_p}{s}\frac{1}{1 + K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)\frac{k_p}{s}} = \frac{k_p s}{s^2 + Kk_p s + Kk_p/T_I}$$

λ-inställning

$$T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{F(s)k_p/s}{1 + F(s)k_p/s}$$

har som lösning P-regulatorn

$$F(s) = \frac{1}{k_p\lambda}$$

för $T(s) = 1/(\lambda s + 1)$ och

$$F(s) = \frac{1}{k_p\lambda(s + 2)}$$

för $T(s) = 1/(\lambda s + 1)^2$. Ingen av dem har integralverkan.

Stationärt fel

För P-regulatorn gäller

$$
\begin{aligned}
G(s)S(s) = G(s)(1 - T(s)) &= \frac{k_p}{s}\left((1 - \frac{1}{\lambda s + 1}\right) \\
&= \frac{k_p}{s}\frac{\lambda s}{\lambda s + 1} = \frac{k_p \lambda}{\lambda s + 1}
\end{aligned}
$$

För r och v enhetssteg gäller enligt slutvärdessatsen att

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) &= \lim_{s \to 0} s\left(T(s)\frac{1}{s} - G(s)S(s)\frac{1}{s}\right) \\
&= \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{\lambda s + 1}\frac{1}{s} - \frac{k_p \lambda}{\lambda s + 1}\frac{1}{s}\right) = 1 - k_p \lambda \neq 1
\end{aligned}
$$

Polplacering

Välj K och T_I så att

$$s^2 + Kk_p s + Kk_p/T_I = (s + 1/\lambda)^2 = s^2 + 2/\lambda s + 1/\lambda^2$$

Sätt koefficienterna för de olika potenserna av s lika, vilket ger

$$Kk_p = 2/\lambda$$
$$Kk_p/T_I = 1/\lambda^2$$

som har lösning $K = 2/(k_p\lambda)$ och $T_I = 2\lambda$. Vi kan nu stoppa in dessa värden i uttrycket för $Y(s)$ i (3) och erhåller

$$Y(s) = \frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2} R(s) - \frac{k_p \lambda^2 s}{(\lambda s + 1)^2} V(s)$$

För r och v enhetssteg gäller enligt slutvärdessatsen att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}\frac{1}{s} - \frac{k_p \lambda^2 s}{(\lambda s + 1)^2}\frac{1}{s}\right) = 1$$

och alltså är reglerfelet noll när tiden går mot oändligheten.

Jämförelse av λ-inställning och polplacering

λ-inställning kan inte eliminera konstanta insignalstörning, vilket polplacering kan.

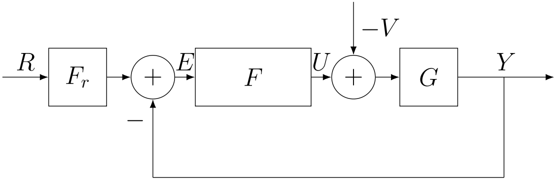
Stegsvaret för λ-inställning från referensvärde har ingen översläng eftersom

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

Stegsvaret för polplacering har en översläng eftersom

$$T(s) = \frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$$

Filtrering av referensvärde



Låt

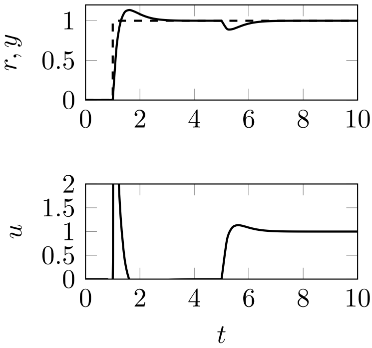
$$F_r(s) = \frac{1}{2\lambda s + 1}$$

Då blir överföringsfunktionen från referensvärde till utsignal för polplacering

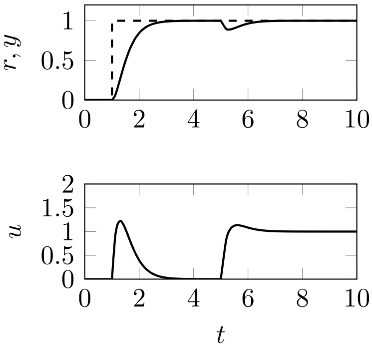
$$T(s)F_r(s) = \frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2} \frac{1}{2\lambda s + 1} = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2}$$

vilket medför att stegsvaret inte har en översläng.

Simulering av PI-reglering



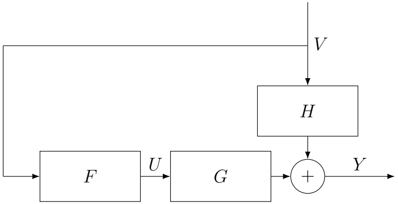
(a) Utan förfiltrering av referensvärde.



(b) Med förfiltrering av referensvärde.

Insignalstörning vid tidpunkten $t = 5$.

Framkoppling från störning



Målet är att eliminera inverkan av $V(s)$ på $Y(s)$, vilket betyder att följande ekvation ska vara uppfylld:

$$Y(s) = H(s)V(s) + G(s)F(s)V(s) = 0$$

Alltså bör vi välja $F(s) = -H(s)/G(s)$.

Problem:

- Insignalutsignalstabilitet kräver att alla poler till $F(s)$ ligger i det strikta vänstra halvplanet, d.v.s. $G(s)$ inte får lov att ha några nollställen i det högra halvplanet.
- $F(s)$ kan innehålla deriveringar.

Derivering

Antag att

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}, \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Då blir

$$F(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} = -\frac{s^2 + 3s + 1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - 2 - s$$

och vi måste derivera störningen för att beräkna styrsignalen.

Ett sätt att undvika detta är att stryka den deriverande termen $-s$. Framkopplingen kommer då att bli exakt endast för konstanta störningar.

Ickekausalitet

Antag att

$$G(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Då blir

$$F(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} = -e^{s\tau}$$

och $u(t) = -v(t+\tau)$, d.v.s. vi måste veta vad störningen är i framtiden.

Detta är alltså en ickekausal regulator som inte går att implementera.

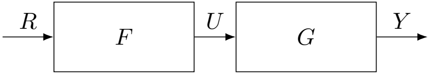
Statisk framkoppling

Statisk framkoppling erhålles från en dynamisk framkommpling $F(s)$ genom att ersätta $F(s)$ med $F(0)$.

En statisk framkoppling är alltid insignalutsignalstabil och kausal.

I förra exemplet sersätter vi då $-e^{s\tau}$ med $-e^{0\tau} = -1$ och vi erhåller $u(t) = -v(t)$.

Framkoppling från referensvärde



Vi har

$$Y(s) = G(s)F(s)R(s)$$

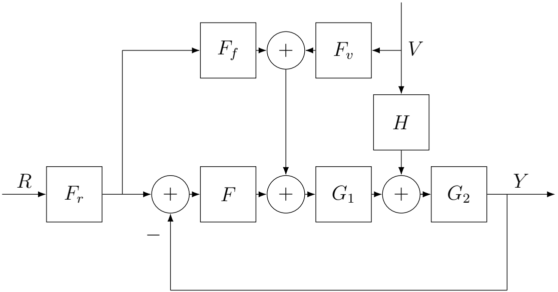
och erhåller $Y(s) = R(s)$, d.v.s. perfekt reglering, om

$$F(s) = 1/G(s)$$

Även här kan man inte alltid välja F på detta sätt.

Från Förelsning 1 minns vi att man inte alltid känner G exakt och då får man inte perfekt reglering med framkoppling.

Kombination av framkoppling och återkoppling



Från blockschemat följer att

$$Y(s) = G_2(s)\Big(H(s)V(s) + G_1(s)\big(F_v(s)V(s) + F_f(s)F_r(s)R(s) + F(s)\left(F_r(s)R(s) - Y(s)\right)\big)\Big)$$

Kombination av framkoppling och återkoppling

Genom att lösa ut $Y(s)$ fås

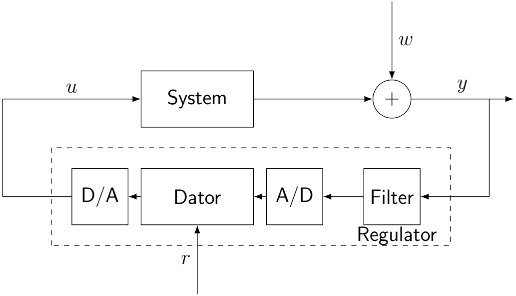
$$Y(s) = \frac{G(s)\left(F_f(s) + F(s)\right)}{1 + F(s)G(s)} F_r(s)R(s) + \frac{G_2(s)(H(s) + G_1(s)F_v(s))}{1 + F(s)G(s)} V(s)$$

där $G(s) = G_1(s)G_2(s)$. Om vi kan välja $F_f(s) = 1/G(s)$ och $F_v(s) = -H(s)/G_1(s)$ så följer att

$$Y(s) = F_r(s)R(s)$$

Om vi endast kan använda approximativa inverser så inser vi att vi med återkopplingen kan komma nära uttrycket ovan om kretsförstärkningen $G_o(s) = F(s)G(s)$ kan göras stor.

Digitalt reglersystem



- En digital regulator arbetar periodiskt.
- Varje cykel eller period k omfattar *samplingsintervallet* $t_k \leq t < t_{k+1}$ med längd $T = t_{k+1} - t_k$ kallad *samplingstid*.

Digitalt reglersystem

- *A/D-omvandling*: datorn läser av det analoga värdet $y(t_k)$ för ärvärdet från sensorn och konverterar det till digital form benämnd y_k. Detta kallas också *sampling*.
- *Styrsignalberäkning*: datorn beräknar ett digitalt värde på styrsignalen u_k.
- *D/A-omvandling*: datorn omvandlar u_k till analog signal som typiskt hålles konstant under samplingsintervallet, d.v.s. $u(t) = u_k,\ t_k \leq t < t_{k+1}$.

Egentligen inte möjligt att ha u_k färdigberäknad vid tidpunkten t_k eftersom det inte ger oss någon tid för att utföra beräkningen. T måste vara sådan att beräkningen kan utföras på mycket mindre tid än T för att denna beskrivning ska vara en god approximation av vad som faktisk sker.

Digital PID-regulator

Vi tänker oss nu att regulatorn är en PID-regulator som ges av

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(s)ds - K_D \frac{dy(t)}{dt}$$

där $e(t) = r(t) - y(t)$ är reglerfelet. Vi kan skriva denna regulator som

$$u(t) = P(t) + I(t) + D(t)$$

där

$$P(t) = K_P e(t), \quad I(t) = K_I \int_0^t e(s)ds, \quad D(t) = -K_D \frac{dy(t)}{dt}$$

Värdet P_k av $P(t)$ för $t = t_k$ beräknas enkelt som

$$P_k = K_P e_k$$

där $e_k = r_k - y_k$.

Approximationer av derivator

Det finns flera sätt att approximera en derivata. Två av dem ges av

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$
$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

där den första kallas *Eulers metod* och den andra kallas *bakåtdifferens*. Detta ger approximationer av $D(t)$ vid tidpunkten t_k:

$$D_k = -\frac{K_D}{T}\left(y_{k+1} - y_k\right)$$
$$D_k = -\frac{K_D}{T}\left(y_k - y_{k-1}\right)$$

Det första alternativet resulterar i en formel som inte är kausal, ty vi måste känna till y_{k+1} för att kunna beräkna D_k. Alltså måste vi välja det andra alternativet för att erhålla en kausal regulator.

Approximation av integraldel

Vi kan skriva om uttrycket för integralen $I(t)$ som en differentialekvation

$$\frac{dI(t)}{dt} = K_I e(t), \quad I(0) = 0$$

och vi kan använda endera av approximationerna ovan för derivatan

$$\frac{I_{k+1} - I_k}{T} = K_I e_k$$
$$\frac{I_k - I_{k-1}}{T} = K_I e_k$$

med $I_0 = 0$. Detta kan skrivas om som

$$I_{k+1} = I_k + T K_I e_k$$
$$I_k = I_{k-1} + T K_I e_k$$

Pseudokod

```
% Förberäkna koefficienter
a = KD/T
b = T*KI

% Initiera variabler
yold = 0;
i = 0;

% Regulatoralgoritm - huvudloop
while  (running) {
   y = adin              % läs in ärvärde
   r = read memory       % hämta börvärde från minnet
   e = r - y             % beräkna reglerfel
   p = KP*e              % beräkna p
   d = -a*(y - yold)     % beräkna d
   u = p + i + d         % beräkna styrsignal
   daout(u)              % ställ ut styrsignal
   i = i + b*e           % uppdatera i
   yold = y              % uppdatera gammalt ärvärde
   sleep(T)              % vänta tills nästa cykel
}
```

Repetitionsfrågor

1. Nämn några metoder för att ställa in en PID-regulator baserad på en modell av systemet som ska regleras.
2. Nämn för- och nackdelar med λ-inställning.
3. Nämn för- och nackdelar med polplacering.
4. Varför kan man vilja filtrera referensvärdet till en regulator?
5. Nämn för- och nackdelar med framkoppling.
6. Varför kan det vara fördelaktigt att göra framkoppling från referensvärde?
7. Varför kombinerar man ofta framkoppling med återkoppling?
8. Vilka är de viktigaste komponenterna för ett digitalt reglersystem?
9. Beskriv de olika sätten man kan approximera derivator med?
10. Hur ser pseudokoden för en PID-regulator ut?