Reglerteknik, Föreläsning 7: Asymptotisk Stabilitet, Överföringsfunktion och Tillståndsform, Tillståndsåterkoppling

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Asymptotisk stabilitet

Definition

Vi säger att systemet

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

är *asymptotiskt stabilt* om lösningen $x(t)$ konvergerar mot noll när t går mot oändligheten för alla initialvärden $x(0) = x_0$.

Sats

Systemet

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

är asymptotiskt stabilt om och endast om $\Re\lambda_i < 0$ för alla i, där λ_i är egenvärdena till A.

Exempel

I tidigare exempel studerade vi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

och kom fram till att

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Vi ser därför att $e^{At} \to 0$ då $t \to \infty$ precis som satsen säger

Insignalutsignalstabilitet

Sats

Ett system (A, B, C, D) är insignalutsignalstabilt om $\Re\lambda_i < 0$ för alla i, där λ_i är egenvärdena till A.

Exempel

Låt ett linjärt dynamiskt system ges av

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

vilket uppenbarligen inte är asymptotiskt stabilt. Dock gäller att viktsfunktionen ges av

$$g(\tau) = Ce^{A\tau}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-\tau}$$

som är absolut integrerbart och vi har insignalutsignalstabiltet.

Från tillståndsform till överföringsfunktion

Givet ett system på tillståndsform

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

låt X vara Laplacetransformen av x. Med $x_0 = x(0)$ gäller

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Enkla algebraiska manipulationer ger

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

och

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Överföringsfunktionen för system på tillståndsform ges därför av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Överföringsfunktionen är invariant under tillståndstransformation

Sats

Systemet definierade av (1) och systemet

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned} \tag{2}$$

med $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$ har samma överföringsfunktion för godtycklig inverterbar matris T.

Likströmsmotor

Med matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har likströmsmotorn tillståndsformen

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3}$$

vilket medför att

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+a)} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

och därav följer att dess överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+a)} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \frac{b}{s(s+a)}$$

Poler och egenvärden

Det gäller allmänt att

$$G(s) = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{\det(sI - A)} + D$$

från vilket det följer att polerna till $G(s)$ är egenvärden till matrisen A. Observera att omvändningen inte gäller.

I exemplet ovan där vi inte hade asymptotisk stabilitet gäller

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

Det gäller vidare att

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s+1)(s-1)$$

och vi ser att faktorn $(s-1)$ förkortats bort.

Från överföringsfunktion till tillståndsform

Det finns många olika tillståndsformer för en given överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Varje sådan tillståndsform kallas för en *realisering* av överföringsfunktionen eller systemet den beskriver.

Gilberts form

Antag att vi kan skriva

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s + p_k}$$

för några koefficienter c_k, $k = 1, \ldots, n$, där $A(s) = (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)$. Låt Laplacetransformen av komponent k av tillståndsvektorn x ges av

$$X_k(s) = \frac{1}{s + p_k} U(s)$$

Då gäller att $Y(s) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_m(s)$. Invers Laplacetransformering av dessa ekvationer ger

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x(t)$$

Styrbar kanonisk form

Givet

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

gäller att den styrbara kanoniska formen

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} x(t)$$

är en realisering.

Observerbar kanonisk form

Givet

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

gäller att den observerbara kanoniska formen

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

är en realisering.

Exempel

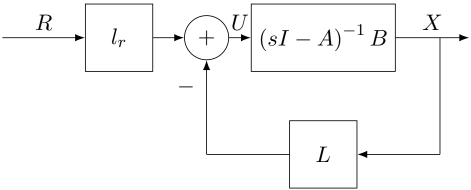
Låt en överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{-4s + 10}{s^2 + 7s + 12} + 1$$

Från detta inser vi att en observerbar kanonisk form ges av

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + u(t)$$

Tillståndsåterkoppling



System givet av

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4}$$

regleras med

$$u(t) = l_r r(t) - Lx(t) \tag{5}$$

Syftet med regleringen

Uppfylla specifikationer på stegsvar för referensvärdet.

Kan ofta relateras till specifikationer på slutna systemets poler.

Substituera uttrycket för $u(t)$ i (5) i differentialekvationen i (4):

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BL)x(t) + Bl_r r(t)$$

Slutna systemets överföringsfunktion från $R(s)$ till $Y(s)$ ges av

$$G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1} Bl_r \tag{6}$$

Slutna systemets poler ges av rötterna till $\det(sI - A + BL) = 0$ om ingen förkortning sker.

Likströmsmotor

För likströmsmotorn har vi

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bl_1 & -a - bl_2 \end{bmatrix}$$

Polpolynomet ges av

$$\det(sI - A + BL) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ bl_1 & s + a + bl_2 \end{vmatrix} = s(s + a + bl_2) + bl_1$$

Vi önskar att polpolynomet ska ges av $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$:

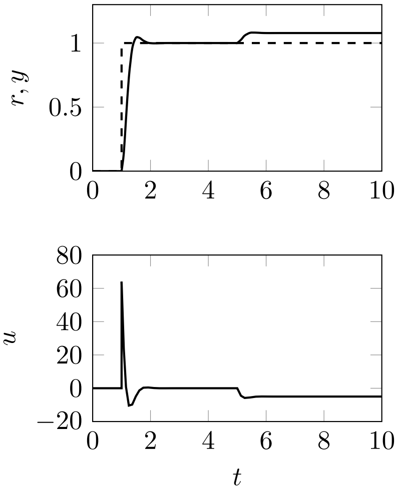
$$a + bl_2 = 2\zeta\omega_0$$
$$bl_1 = \omega_0^2$$

som har lösning $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2/b & (2\zeta\omega_0 - a)/b \end{bmatrix}$ som ger

$$C(sI - A + BL)^{-1} Blr = \frac{bl_r}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Om vi vill att den statiska förstärkningen ska vara ett så ska vi välja l_r så att $bl_r = \omega_0^2$, eller ekvivalent $l_r = l_1$.

Stegsvar för reglerad likströmsmotor



Simulering av det slutna systemet för $\omega_0 = 7$, $\zeta = 0.7$, $a = 1$ och $b = 1$ då referensvärdet är ett enhetssteg vid tidpunkten ett och insignalstörningen är ett steg med amplitud fem vid tidpunkten fem.

Var kan polerna placeras?

Resultat

Polplacering med tillståndsåterkoppling. För systemet givet av (4) kan vi med tillståndsåterkopplingen i (5) placera slutna systemets poler godtyckligt om (A, B) är styrbart. Öppna systemet och slutna systemet har samma nollställen.

Vad händer då (A, B) ej styrbart?

Betrakta systemet givet av

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Nu gäller att

$$A - BL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & 1 - l_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eftersom matrisen är triangulär ges egenvärdena av diagonalelementen som är $1 - l_1$ och -1. Vi kan alltså bara påverka ett av egenvärdena med L. Om vi väljer $l_1 = 2$ så blir båda egenvärdena -1 och det slutna systemet asymptotiskt stabilt. Eftersom egenvärdena inte kan väljas godtyckligt kan systemet inte vara styrbart.

Stabiliserbarhet

Definition

Om det finns L så att $A - BL$ har alla egenvärden strikt i det vänstra halvplanet så säger vi att (A, B) är *stabiliserbart*.

Vi inser att styrbarhet medför stabiliserbarhet men att omvändingen inte gäller.

Exempel

Betrakta systemet givet av

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Nu gäller att

$$A - BL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & 1 - l_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom matrisen är triangulär ges egenvärdena av diagonalelementen som är $1 - l_1$ och 1. Vi kan inte påverka egenvärdet 1 med L och alltså är detta system inte stabiliserbart.

Hur väljer man l_r?

Oftast väljer man l_r så att statiska förstärkningen för det slutna systemet blir ett, vilket innebär att reglerfelet konvergerar mot noll för ett konstant referensevärde när tiden går mot oändligheten.

Den statiska förstärkningen ges enligt (6) av

$$G_c(0) = C(-A + BL)^{-1} B l_r$$

vilket ger följande ekvation för l_r:

$$C(-A + BL)^{-1} B l_r = 1$$

Notera att vi i exemplet med likströmsmotorn såg till att välja l_r på detta sätt.

Repetitionsfrågor

1. Vad är definitionen av att ett system är asymptotiskt stabilt?
2. Ange ett tillräckligt villkor för att ett system ska vara asymptotiskt stabilt.
3. Hur relaterar asymptotisk stabilitet till insignalutsignalstabilitet?
4. Hur relaterar ett systems överföringsfunktion till dess systemmatriser (A, B, C, D)?
5. Hur är en kanonisk form relaterad till överföringsfunktionen?
6. Beskriv vad tillståndsåterkoppling är.
7. När kan man välja slutna systemets poler godtyckligt med hjälp av tillståndsåterkoppling?
8. Förklara begreppet stabiliserbarhet.
9. Hur inför man referensvärden tillsammans med tillståndsåterkoppling?