Reglerteknik, Föreläsning 8: Rekonstruktion av Tillstånd och Återkoppling från Rekonstruerade Tillstånd

Anders Hansson

Avdelningen för reglerteknik
Linköpings universitet

Innehåll

Rekonstruktion av tillstånd

Betrakta

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Intresserade av att försöka beräkna vad $x(t)$ är trots att vi bara kan mäta $y(t)$. Vi har även kännedom om vad $u(t)$ är. En naiv ansats är att simulera

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Om vi kan välja $\hat{x}(0) = x(0)$ så inser vi att $\hat{x}(t) = x(t)$ för alla $t \geq 0$.

Inte realistiskt, eftersom vi inte rimligen kan veta $x(0)$ när vi inte kan mäta tillståndet.

Vad händer efter lång tid?

Studera *skattningsfelet* $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) = A\tilde{x}(t)$$

och vi inser att $\tilde{x}(t)$ konvergerar mot noll när tiden går mot oändligheten om systemet är asymptotiskt stabilt.

Hastigheten med vilken detta sker beror på det egenvärde till A som ligger närmast imaginära axeln.

Om systemet inte är asymptotiskt stabilt så divergerar skattningsfelet.

Observatör

Idé: utnyttja $y(t)$ till att förbättra hastigheten med vilken man kan får skattningsfelet att gå mot noll.

Ansätt generell linjär differentialekvation, kallad *observatör*:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F\hat{x}(t) + Gu(t) + Ky(t)$$

där F, G och K är matriser vi ska välja så att om $\hat{x}(0) = x(0)$ så blir $\hat{x}(t) = x(t)$ för alla $t \geq 0$. Vi vill också att skattningsfelet $\tilde{x}(t)$ ska konvergera mot noll när tiden går mot oändligheten.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) - F\hat{x}(t) - Gu(t) - Ky(t) \\ &= (A - KC)x(t) - F\hat{x}(t) + (B - G)u(t)\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $y(t) = Cx(t)$.

Observatör

Vi inser att vi måste välja $F = A - KC$ och $B = G$ om vi vill uppfylla kravet att skattningsfelet ska vara noll när vi känner initialvärdet. Då erhåller vi att

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = (A - KC)\tilde{x}(t)$$

och vi inser att vi måste välja K så att $A - KC$ har alla egenvärden strikt i vänster halvplan för att skattningsfelet ska konvergera mot noll när tiden går mot oändligheten.

Likströmsmotorn

Tillståndsformen för likströmsmotorn ges av systemmatriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har med $K^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ att

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -1 \\ k_2 & \lambda + a \end{vmatrix} = (\lambda + k_1)(\lambda + a) + k_2$$

och om vi vill att det polynom ska vara identiskt lika med $\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2$ så ska vi välja k_1 och k_2 så att

$$\begin{aligned} k_1 + a &= 2\zeta\omega_0 \\ k_1 a + k_2 &= \omega_0^2 \end{aligned}$$

som har lösning $k_1 = 2\zeta\omega_0 - a$ och $k_2 = \omega_0^2 - (2\zeta\omega_0 - a)a$.

Hur kan egenvärdena väljas?

Resultat

Rekonstruktion av tillstånd. För systemet givet av (1) gäller för *observatören*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left(y(t) - C\hat{x}(t)\right) \tag{3}$$

att skattningsfelet $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ satisfierar

$$\frac{\tilde{x}(t)}{dt} = (A - KC)\tilde{x}(t)$$

Om (A, C) är observerbart kan vi välja egenvärdena till $A - KC$ godtyckligt.

Vad händer då (A, C) ej observerbart?

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som inte är ett observerbart system. Då gäller med $K^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ att

$$A - KC = \begin{bmatrix} -1 & 1 - k_1 \\ 0 & 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

och vi inser att egenvärdena är -1 och $1 - k_2$. Vi kan alltså bara påverka ett av egenvärdena och detta kan göras negativt med lämpligt val av k_2. Det andra egenvärdet är -1 oavsett vad K är.

Detekterbarhet

Definition

Om det finns K så att $A - KC$ har alla egenvärden strikt i det vänstra halvplanet så säger vi att (A, C) är *detekterbart*.

Vi inser att observerbarhet medför detekterbarhet men att omvändingen inte gäller.

Likströmsmotorn

Istället för att mäta vinkeln θ mäter vi vinkelhastigheten ω.

Systemmatriserna ges av

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har med $K^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ att

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 - k_1 \\ 0 & -a - k_2 \end{bmatrix}$$

och vi inser att det ena egenvärdet är noll och att det andra kan väljas godtyckligt med k_2. Det kommer alltså inte att gå bra att skatta positionen från mätning av vinkelhastigheten. Observatören kommer att integrera vinkelhastigheten, men om man inte känner initialvärdet för vinklen, så kommer felet i initialvärde att vara kvar för alla tider. Detta system är alltså vare sig observerbart eller detekterbart.

Störningars inverkan

Får man alltid en bättre observatör ju längre in i vänster halvplan man placerar egenvärdena för $A - KC$? Studera

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \end{aligned} \tag{4}$$

där $v(t)$ är en störning på tillståndsvektorn och $w(t)$ är en störning på utsignalen. Observatören ges som innan av av

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

men rekonstruktionsfelet satisfierar istället

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - K(Cx(t) + w(t) \\ &- C\hat{x}(t)) = (A - KC)\tilde{x}(t) + v(t) - Kw(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Skillnaden mot innan är att v och w blir insignaler till skattningsfelet.

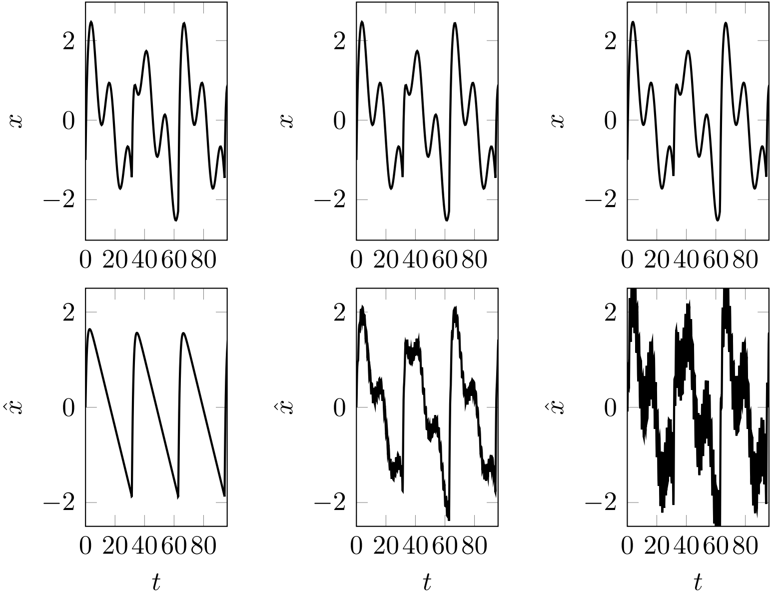
Exempel

För fallet $A = -1$ och $C = 1$ har vi att att $A - KC = -1 - K$ och vi ser att vi kan välja egenvärdet för systemet som beskriver rekonstruktionsfelet godtyckligt negativt genom att välja K godtyckligt stort. Samtidigt inser vi genom att $\mathcal{L}$-transformera (5) att

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s+1+K}V(s) - \frac{K}{s+1+K}W(s)$$

där vi antagit att $\tilde{x}(0) = 0$. Vi kommer alltså aldrig att konvergera till ett skattningsfel som är noll, inte ens om vi startar med ett fel som är noll. Vi bör välja K stort för att den första termen ska bli liten, men vi bör välja K litet för att den andra termen ska bli liten. Oavsett hur vi väljer K kommer vi att ha inverkan av e och v i skattningsfelet.

Exempel

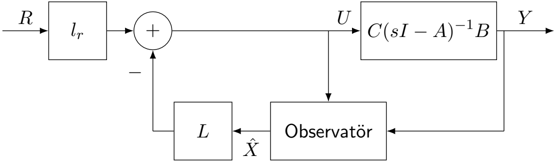


(a) $K = 0$ (b) $K = 1$ (c) $K = 5$

Exempel

- Initialvärdena är $x(0) = -1$ och $\hat{x}(0) = 0$, $u(t)$ är en sågtandsformad signal, $v(t) = \sin 0.5t$, $w(t) = \sin 5t$.
- K har värdena $0, 1$ respektive 5.
- För $K = 0$ är observatören för långsam och kan inte följa de mer högfrekventa variationerna i x.
- För $K = 1$ går det bättre, men till priset av att det ännu mer högfrekventa mätfelet börjar synas i skattningen.
- För $K = 5$ klarar observatören av att följa de högfrekventa variatonerna i x väl men till priset av att mätfelet förstärks alldeles för mycket.

Återkoppling från rekonsturerade tillstånd



Från blockschemat:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(y) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

$$u(t) = l_r r(t) - L\hat{x}(t)$$

Alternativt

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - BL - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BL_r \\ BL_r \end{bmatrix} r(t) \qquad (6)$$

Transformation av tillstånden

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

ger

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BL_r \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \tag{7}$$

och vi ser att det slutna systemets egenvärden är egenvärdena för $A - BL$ och $A - KC$.

Endast $x(t)$ är styrbart från $r(t)$ och därför är överföringsfunktionen från $R(s)$ till $Y(s)$

$$G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1} Bl_r$$

vilket är samma överföringsfunktion som när vi kunde mäta alla tillstånd.

Val av K och L

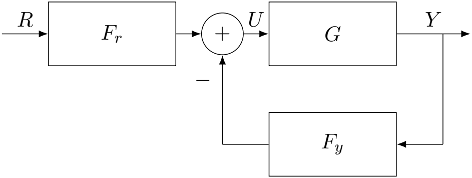
Vi kan separera valet av L och K när vi designar regulatorn.

Det är endast L som påverkar $G_c(s)$.

K kommer endast att påverka hur snabbt rekonstruktionsfelet $\tilde{x}(t)$ konvergerar mot noll.

Inverkan av $\tilde{x}(t)$ kommer att synas i utsignalen $y(t)$. Det betyder att transient kommer den här regulatorn att uppföra sig annorlunda än regulatorn som återkopplar från mätta tillstånd. För att minimiera denna skillnad brukar man välja egenvärdena för $A - KC$ längre in i vänster halvplan än de för $A - BL$.

Regulator med två frihetsgrader



Från andra ekvationen i (6) får vi efter Laplacetransformering att

$$\hat{X}(s) = (sI - A + BL + KC)^{-1}(KCX(s) + BL_r R(s))$$

om initialvärdena är noll. Detta gör att styrsignalens blir

$$U(s) = \left(I - L(sI - A + BL + KC)^{-1}B\right) l_r R(s) \\ - L(sI - A + BL + KC)^{-1}KY(s)$$

Med

$$F_y(s) = L(sI - A + BL + KC)^{-1}$$
$$F_r(s) = \left(I - L(sI - A + BL + KC)^{-1}B\right) l_r$$

kan denna regulator beskrivas som en regulator med *två frihetsgrader* med $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ i blockschemat.

Störningar

Med störningar gäller

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B\left(u(t) + v(t)\right) \\
y(t) &= Cx(t) + w(t) \\
\frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= A\hat{x}(t) + Bu(y) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \\
u(t) &= l_r r(t) - L\hat{x}(t)
\end{aligned}$$

eller

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - BL - KC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$+ \begin{bmatrix} Bl_r \\ Bl_r \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} w(t) \tag{9}$$

Byte at tillstånd ger

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} Bl_r \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -K \end{bmatrix} w(t)
$$

Laplacetransformering då initialvärdena är noll ger

$$
\begin{aligned}
X(s) &= (sI - A_c)^{-1} B \left(L\tilde{X}(s) + l_r R(s) + V(s) \right) \\
\tilde{X}(s) &= (sI - A_o)^{-1} \left(BV(s) - KW(s) \right)
\end{aligned}
$$

där $A_c = A - BL$ och $A_o = A - KC$. Lite räkningar ger nu att

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= CX(s) + W(s) \\
&= G_c(s)R(s) + C(s - A_c)^{-1} B \left(L(sI - A_o)^{-1} B + I \right) V(s) \\
&+ \left(I - C(sI - A_c)^{-1} \right) BL(sI - A_o)^{-1} K \right) W(s)
\end{aligned}
$$

Hur A_c och A_o påverkar överföringsfunktionerna

Egenvärdena för A_c bestämmer polerna för G_c.

Egenvärdena för A_c och A_o bestämmer överföringsfunktionerna från $V(s)$ och $W(s)$ till $Y(s)$.

Därför är valet K av inte bara viktiga för hur snabbt inverkan av det initiala skattningsfelet $\tilde{x}(0)$ klingar av utan även för undertryckningen av störningar.

Känslighetsfunktioner

Känslighetsfunktionen är överföringsfunktionen från utsignalstörning till utsignal

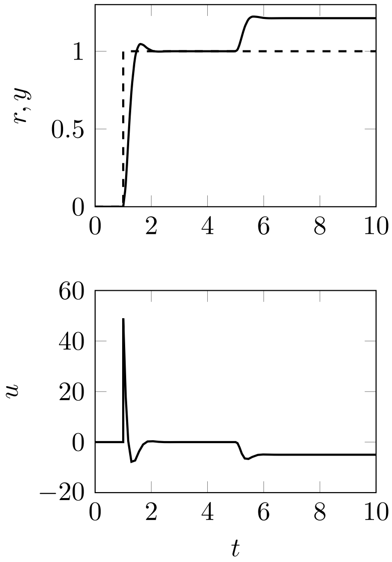
$$S(s) = I - C(sI - A_c)^{-1})BL(sI - A_o)^{-1}K \tag{10}$$

Eftersom det alltid gäller att $T(s) + S(s) = I$, där $T(s)$ är den komplementära känslighetsfunktionen gäller att

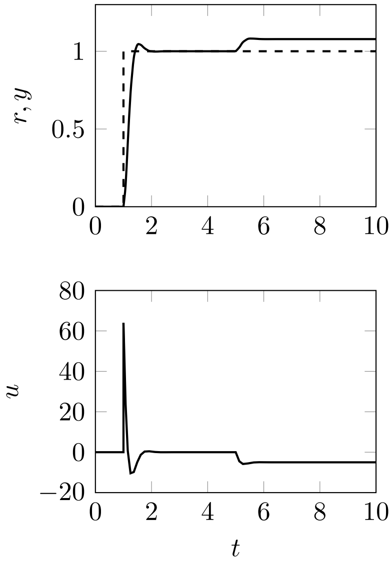
$$T(s) = C(sI - A_c)^{-1})BL(sI - A_o)^{-1}K \tag{11}$$

Det kan visas att detta är överföringsfuktionen från insignalstörning till styrsignal.

Exempel: Likströmsmotorn



(a) Återkopping från skattade tillstånd



(b) Återkopping från mätta tillstånd

Repetitionsfrågor

1. Hur ser ekvationerna för en observatör ut?
2. När kan man välja skattningsfelets dynamik godtycklig?
3. Vad innebär begreppet detekterbarhet?
4. Hur påverkar observatörsförstärkningen inverkan av störningar och mätfel på skattningsfelet?